

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





НОВЫЕ КНИГИ

ПО ТЕХНИЧЕСКИМ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ И СПЕЦИАЛИСТОВ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «ТЕХНОСФЕРА»

WWW.TECHNOSPHERA.RU



ТЕХНОСФЕРА
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР

125319, г. Москва, а/я 594, тел. (095) 234-0110, факс (095) 956-3346

E-mail: knigi@technosfera.ru; <http://www.technosfera.ru>

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленин, С.А.Гордунин,
Н.П.Долбиллин, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,
А.Р.Зильберман, В.В.Козлов,
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора),

И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

©2004, Президиум РАН,
Фонд Осипяна, «Квант»

- 2 Числа Каталана. *А.Спивак*
11 О рельефе коры на стволе дерева. *А.Минеев*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 16 Демокрит и учение об атомах. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи М1906–М1915, Ф1913–Ф1922
18 Решения задач М1886–М1890, Ф1898–Ф1907

К М Ш

- 25 Задачи
26 Две игры. *А.Грамши*
27 Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина
«Математика 6–8»

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 30 Два торнадо и несколько ворон. *В.Вышинский*
31 Путешествие на воздушном шаре. *С.Варламов*
35 Теоремы Менелая и Чевы. *А.Егоров*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Теплопередача

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 39 Легко ли быть квадратной рамкой? *А.Стасенко*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 41 Изогональное сопряжение в тетраэдре и его гранях.
А.Заславский, Д.Косов

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 45 Нестандартные конденсаторы. *В.Можаев*

ОЛИМПИАДЫ

- 49 XII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»
52 Международная физическая олимпиада «Туймаада»
54 Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

ИНФОРМАЦИЯ

- 57 Новый прием на заочное отделение Малого мехмата
57 Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ
59 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (15, 24, 58)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Два торнадо и несколько ворон»*
III *Шахматная страничка*
IV *Физики и математики на монетах мира*

Числа Каталана

А. СПИВАК

Ответ от задачи не зависит.

Эйлер, Каталан и др.

ЭТА СТАТЬЯ СОСТОИТ ИЗ ДВУХ ЧАСТЕЙ. В ПЕРВОЙ части дано три десятка разных определений одной и той же последовательности натуральных чисел, доказана равносильность некоторых из этих определений и выведена рекуррентная формула. Во второй части тремя совершенно непохожими способами выведена явная формула n -го члена этой последовательности.

Задачи разные – ответ один

Разрезания на треугольники

Леонард Эйлер был первым, кто столкнулся с интересующей нас последовательностью. Он спросил себя, сколькими способами можно выпуклый n -угольник разрезать на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри этого n -угольника. Ответ для $n = 3$ тривиален: никаких диагоналей проводить не надо (рис.1). Для $n = 4$ можно провести любую из двух



Рис.1

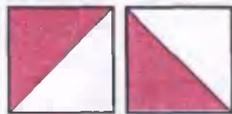


Рис.2

диагоналей, так что способов два (рис.2). Для $n = 5$ все 5 способов тоже по сути одинаковы: из некоторой вершины выходят две диагонали (рис.3). При $n = 6$



Рис.3



Рис.4

получаем первый нетривиальный ответ: 14 способов (рис.4).

Интересно, а как быть с семиугольником? Неужели нужно рисовать все способы? Нет, можно выделить одну из сторон и классифицировать разрезания в



Рис.5

зависимости от того, какой треугольник к этой стороне примыкает. Имеем 5 разных случаев (рис.5). В первом и последнем из них количество разбиений равно 14, ибо после отрезания треугольника остается шестиугольник. Во втором и четвертом случаях при вырезании треугольника семиугольник распадается на треугольник и пятиугольник. Треугольник резать не надо, а пятиугольник, как мы уже знаем, дает 5 способов. В третьем случае от семиугольника остаются два четырехугольника. Поскольку каждый из них можно разбить двумя способами, получаем $2 \cdot 2 = 4$ варианта. Итак, семиугольник можно разбить всего

$$14 + 5 + 2 \cdot 2 + 5 + 14 = 42$$

способами.

Рассматривая восьмиугольник, аналогично получаем

$$42 + 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 + 42 = 132$$

способа. Для девятиугольника имеем

$$132 + 42 + 2 \cdot 14 + 5 \cdot 5 + 14 \cdot 2 + 42 + 132 = 429$$

способов, а для десятиугольника –

$$429 + 132 + 2 \cdot 42 + 5 \cdot 14 + 14 \cdot 5 + 42 \cdot 2 + 132 + 429 = 1430$$

способов.

Такие вычисления можно проводить и дальше: 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, ...

Упражнения

1. На окружности отмечены 18 точек. Сколькими способами можно так разбить их на пары, чтобы соответствующие хорды не пересекались? (На рисунках 6, а, б, в показаны все способы для, соответственно, 2, 4 и 6 отмеченных точек.)

2. На рисунке 7 показаны все способы разбить на пары 6 точек, находящихся на горизонтальной прямой, при помощи

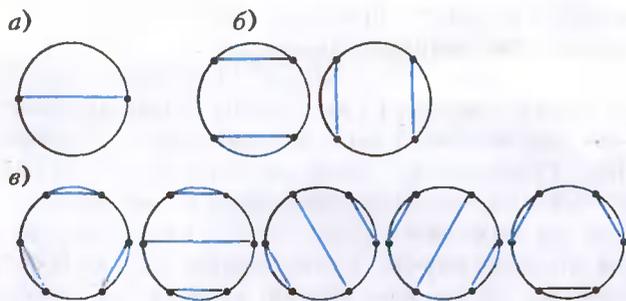


Рис.6

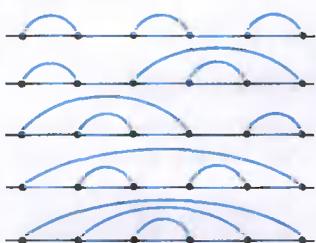


Рис.7

сторон или диагоналей таким образом, что остальные вершины можно разбить на пары при помощи непересекающихся сторон или диагоналей. Сколькими способами мож-



Рис.8

но выполнить аналогичное построение для правильного 14-угольника?

4. На рисунке 9 изображены все 5 способов соединить дугами некоторые из расположенных на одной горизонтальной прямой точек таким образом, что дуги лежат в верхней полуплоскости и не пересекают одна другую, их количество в сумме с количеством изолированных точек равняется двум, причем ни одна изолированная точка не лежит под дугой. Скольким существует способов нарисовать такие картинка, чтобы сумма количества дуг и количества изолированных точек равнялась шести?

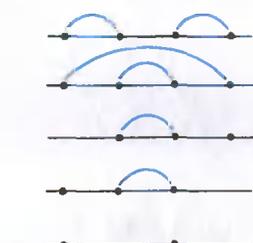


Рис.9

5. На рисунке 10 изображены все 5 способов соединить четыре точки, расположенные на горизонтальной прямой, дугами, лежащими в верхней полуплоскости и не пересекающимися одна другую во внутренних точках, таким образом, что из любой точки можно пойти по дугам в любую другую, причем единственным способом (другими словами, дуги

¹ В этом и следующих пяти упражнениях форма линий не имеет значения. Важно лишь то, пересекаются линии или нет и какие точки они соединяют.

образуют дерево), да к тому же в любой точке сходящиеся в ней дуги идут либо все направо, либо все налево. Скольким таких способов существует для 7 точек?

6. На рисунке 11 изображены все 5 способов так соединить лежащими в верхней полуплоскости дугами четыре расположенные на горизонтальной прямой точки, что дуги образуют дерево, в любой точке сходящиеся в ней дуги идут либо все направо, либо все налево, причем никакая дуга не расположена всеми своими точками (включая концевые) строго под другой дугой. Скольким таких способов существует для 10 точек?

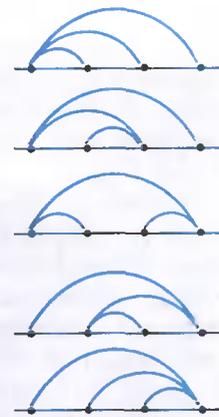


Рис.11

Вычисления произведений

Рассмотрим другую – алгебраическую – задачу. Произведение abc можно понимать двояко: $(ab)c$ и $a(bc)$. (Конечно, по закону ассоциативности, результат не зависит от порядка действий. Но промежуточные результаты – зависят!) Произведение $abcd$ можно понимать пятью способами: $((ab)c)d$, $(a(bc))d$, $a((bc)d)$, $a(b(cd))$ и $(ab)(cd)$. Произведение $abcde$ – четырнадцатью способами. Чтобы убедиться в этом, не обязательно их все выписывать. Достаточно заметить, что есть 5 способов вида $a(bcde)$, 2 способа вида $(ab)(cde)$, 2 способа вида $(abc)(de)$ и 5 способов вида $(abcd)e$.

По определению, число Каталана² C_n – это количество способов расставить скобки в произведении n множителей. Понятно, что $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = 2$, $C_4 = 5$, $C_5 = 14$. Выведем для последовательности Каталана рекуррентную (т.е. выражающую очередной член последовательности через предыдущие) формулу. Для этого рассмотрим умножение, которое будет выполнено в последнюю очередь. Произведение $x_1x_2 \dots x_n$ получается в конечном счете как произведение некоторого произведения первых нескольких символов на некоторое произведение остальных:

$$x_1x_2 \dots x_n = (x_1 \dots x_r) \cdot (x_{r+1} \dots x_n) \dots$$

Первые r символов могут быть скомбинированы C_r способами, последние $n - r$ символов – C_{n-r} способами. Таким образом,

$$C_n = C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_1.$$

Это и есть рекуррентная формула для последовательности Каталана. Например, чтобы посчитать C_{10} , достаточно выписать одно за одним первые девять чисел Каталана, а под ними – те же числа в обратном порядке:

1	1	2	5	14	42	132	429	1430
1430	429	132	42	14	5	2	1	1

Умножив каждое верхнее число на соответствующее нижнее и сложив, получаем $C_{10} = 4862$.

² Эжен Шарль Каталан (1814–1894) – бельгийский математик.

Как видно, способ вычисления очередного члена последовательности Каталана такой же, как в задаче Эйлера о разрезаниях на треугольники. Приходим к довольно неожиданному выводу: количество способов разрезать выпуклый n -угольник на $n - 2$ треугольника равно C_{n-1} .

Нельзя ли найти еще более явную связь между рассмотренными двумя задачами – построить взаимно однозначное соответствие (коротко говоря, биекцию) между разбиениями на треугольники и способами подсчета произведений? Можно! Для этого (как заметил Фордер в 1961 году) достаточно выделить одну сторону $(n + 1)$ -угольника и написать сомножители около n других его сторон, по одной букве у каждой стороны, а затем «стягивать» треугольники, на двух

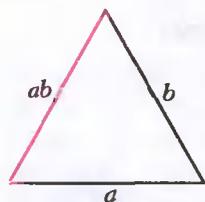


Рис. 12

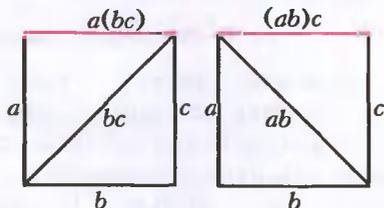


Рис. 13

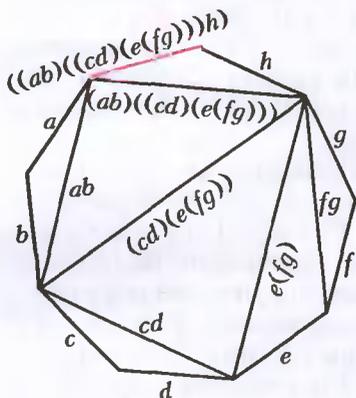


Рис. 14

сторонах которых уже что-то написано, записывая произведение на третью сторону. На рисунках 12 и 13 это показано для $n = 2$ и $n = 3$ соответственно, а на рисунке 14 изображен один из 429 случаев для $n = 8$.

Упражнение 7. Число C_n четно тогда и только тогда, когда n является степенью двойки, точнее когда $n = 2^k$, где k – целое неотрицательное число. Докажите это.

Расстановки скобок

Рассмотрим какое-нибудь арифметическое выражение и сотрем все, кроме скобок. Получим некоторую систему открывающих и закрывающих скобок. Какими свойствами она обладает? Во-первых, открывающих скобок ровно столько же, сколько и закрывающих. Во-вторых, ни в каком начальном отрезке количество закрывающих скобок не может оказаться больше количества открывающих скобок. Например, расстановки $)()$ и $((()))()$ неправильные. Нетрудно доказать, что эти два условия не только необходимы, но и достаточны.

Рассмотрим несколько примеров. Одна пара скобок может выглядеть единственным способом: $()$. Две пары – двумя способами: $()()$ или $(())$. Три пары – пятью способами: $()()()$, $()(())$, $(())()$, $((()))$ или $((())())$. Четыре пары, как нетрудно проверить, – четырнадцатью способами. Чтобы понять, сколькими спосо-

бами могут выглядеть правильно расставленные пять пар скобок, рассмотрим закрывающую скобку, парную к первой открывающей скобке. Остальные четыре пары тогда разделятся на две группы: расположенные внутри рассмотренной пары и расположенные справа от нее. (Разумеется, любая из этих групп может состоять из 0 скобок.) Способов, когда все четыре пары внутри или все четыре справа, – по 14 в каждом случае. Когда три пары внутри, а одна справа, – 5 способов. Столько же – когда одна внутри, а три справа. Наконец, когда две пары внутри, а две справа, имеем $2 \cdot 2 = 4$ способа. Итого,

$$14 + 5 + 2 \cdot 2 + 5 + 14 = 42$$

способа. Не правда ли, мы это уже видели?

Упражнение 8. Рассмотрим произведение $((((ab)(cd))(ef))(gh))$. Сотрем все закрывающие скобки, после чего заменим все буквы на закрывающие скобки и последнюю из них сотрем:

$$(((())())())()$$

Как видите, получили правильную расстановку скобок. (На рисунках 15 и 16 показаны и другие примеры.) Дока-

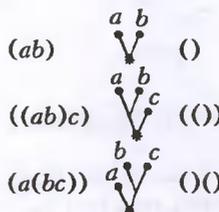


Рис. 15

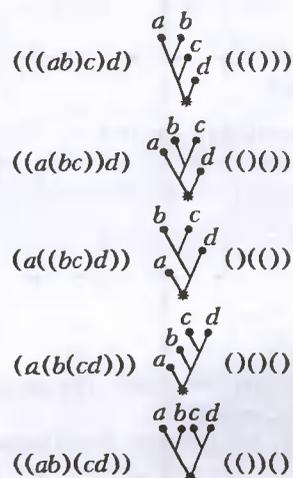


Рис. 16

жите, что тем самым мы получаем биекцию между расстановками скобок и способами подсчета произведений.

Треугольник Каталана

Известный треугольник Паскаля (рис.17) получается, если начать с верхней единицы и затем действовать по правилу «каждое очередное число равно сумме чисел, расположенных над ним справа и слева» (а на краях – единицы). Он обладает многими интересными свойствами. Но сейчас речь не о нем. Давайте проведем вертикальную черту, левее которой заходить нельзя, и будем выписывать числа так, словно мы составляем треугольник Паскаля (рис.18). На самой левой вертикали – числа Каталана! Не правда ли, неожиданно?

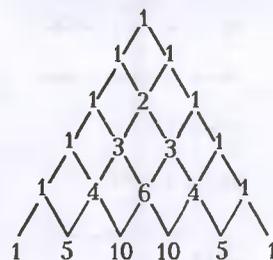


Рис. 17

Для дальнейшего нам потребуются два интересных и легко доказываемых свойства полученного треугольника. Во-первых, сумма чисел, выделенных на рисунке 18 синим цветом, равна числу, обведенному синим

4123 1423 1243 1234
 4132 → 1432 → 1342 1324
 4213 → 2413 → 2143 → 2134
 4231 → 2431 → 2341 2314

312 213 123 4312 → 3412 → 3142 → 3124

321 231 132 4321 → 3421 → 3241 → 3214

Рис 25

Рис 26

ка. Сумма этих чисел равна $C_5 = 14$, а сами они присутствуют в треугольнике Каталана. Таким образом, возникает гипотеза: для любого натурального n количество правильных по Кнуту перестановок, в которых n расположено на k -м месте, равно числу, расположенному в k -м вертикальном столбце треугольника Каталана на n -й линии, идущей параллельно линии «синих чисел» рисунка 18.

Мне не удалось разыскать решение самого Кнута. Поэтому в течение нескольких лет я знакомил с этой задачей своих учеников, и наконец в прошлом году девятиклассник Д. Матюшин придумал изложенное здесь решение.

Начну с простого замечания. Первые $k - 1$ чисел любой правильной перестановки образуют убывающую последовательность – иначе вместе с числом n числа a и b , где $a < b$ и a левее, чем b , a левее, чем n , образовывали бы тройку расположенных в порядке возрастания чисел $a < b < n$.

Пусть непосредственно справа от числа n расположено число c . Можно ли поменять местами числа n и c ? Иногда можно, иногда нельзя (посмотрите на стрелочки рисунка 26!). Зависит это от того, останется ли убывающей последовательность чисел, расположенных слева от n , после такой операции. Проще говоря, если слева от n стояло число, которое больше числа c , то менять местами числа n и c можно. В противном случае – нельзя.

В этом самом противном случае заметим, что если справа от c окажется какое-то число $d > c$, то расположенное непосредственно слева от n число вместе с числами c и d образует тройку чисел в порядке возрастания. Значит, числа от $c + 1$ до $n - 1$ расположены левее числа n . Как вы помните, последовательность чисел, расположенных левее n , является убывающей. Следовательно, она начинается с чисел $n - 1, n - 2, \dots, c + 1$. Осталось вычеркнуть эти числа вместе с числом n и получим последовательность из первых c натуральных чисел, в которой c расположено на одну позицию ближе к правому краю, чем раньше располагалось число n .

Рассмотрим для примера $n = 9, k = 4$. Первые три числа любой такой правильной перестановки образуют убывающую последовательность. Сдвинув число 9 на пятое место (стоявшее на пятом месте число перемещая при этом на четвертое место) можно в 275 случаях – именно столько существует правильных перестановок из 9 элементов, в которых 9 расположено на 4-м месте. Если же сдвиг невозможен, то справа от 9 должно

стоять число большее, чем слева. Разберем все по порядку. Очевидно, случай $c = 1$ невозможен. Если $c = 2$, то все числа от 3 до 8 должны стоять на первых трех местах, но им там не хватает места. То же – для $c = 3, 4$ или 5. А вот случай $c = 6$ возможен:

87*96****.

Вычеркивая цифры 7, 8 и 9, получаем последовательность вида *6****, а таких (правильных по Кнуту) последовательностей всего 42 штуки. Далее, при $c = 7$ имеем

8**97****.

Вычеркивая цифры 8 и 9, получаем **7****; таких 90 штук. Наконец, при $c = 8$ надо вычеркнуть только цифру 9, а правильных по Кнуту последовательностей вида ***8**** существует 165 штук. Итого: $275 + (42 + 90 + 165) = 275 + 297 = 572$.

Деревья с n листьями

На рисунках 15 и 16 кроме произведений и расстановок скобок изображены деревья. А на рисунке 27

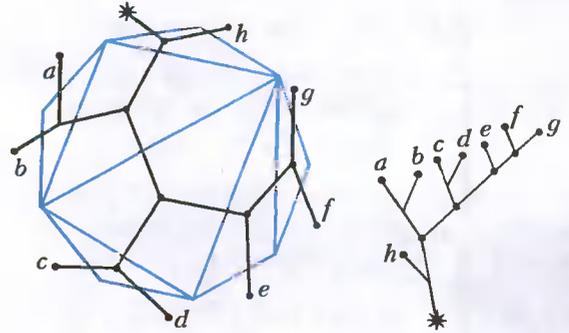


Рис 27

разбиению выпуклого 9-угольника на треугольники сопоставлено корневое плоское дерево с 9 листьями.³

Английский математик Артур Кэли заметил, что C_n есть количество плоских корневых деревьев с n листьями, степень⁴ любой вершины которого равна 1 или 3. На рисунках 28, 29 и 30 изображены все интересные нас деревья с 3, 4 и 5 листьями соответственно.

Польский математик Ян Лукаевич предложил несложный способ сопоставить каждому дереву расстановку скобок. Он пометил все листья, кроме последнего, закрывающими скобками, а вершины степени 3 – открывающими (рис.31). А затем вообразил, что гусеница оползает все дерево вдоль пунктирной линии, собирая все скобки (однажды взятую скобку гусеница второй раз не берет!). Нетрудно доказать, что гусеница получит пра-



Рис 28

³ Дерево – это связный граф без циклов. Слово «плоское» означает, что граф нарисован на плоскости без пересечений. «Корневое» – что одна из вершин, из которой выходит только одно ребро, выделена и названа корнем дерева. На рисунке 27 корневая вершина отмечена звездочкой. Лист – это отличная от корня вершина дерева, из которой выходит только одно ребро; на рисунке 27 листья помечены буквами.

⁴ Степень (или валентность) вершины графа – это количество сходящихся в ней ребер.



Рис. 29

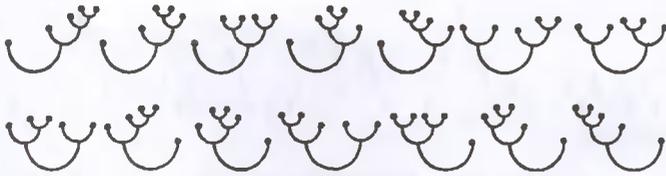


Рис. 30

вильную расстановку скобок, соответствующую способу вычисления произведения. Например, на рисунке

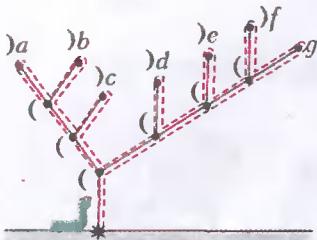


Рис. 31

31 она получит расстановку $((())())()$, соответствующую произведению $((ab)c)(d(e(fg)))$.

Деревья с n вершинами

В 1964 году было обнаружено, что количество корневых плоских деревьев с n вершинами равно C_n . У таких деревьев $n - 1$ ребер; степени вершин могут быть любыми. Красивую простую конструкцию придумал Фрэнк Бернхарт (рис. 32): системе непересекающихся хорд соответствует дерево, количество ребер которого равно количеству этих хорд.



Рис. 32

Есть – придуманная тем же Бернхартом – и биекция между корневыми плоскими деревьями с n листьями, степени вершин которых могут равняться только 1 или 3, и корневыми плоскими деревьями

с n вершинами. Это взаимно однозначное соответствие для $n = 2, 3$ и 4 показано на рисунках 33, 34 и 35 соответственно. Идея в том, что все горизонтальные ребра (синие линии) стягиваем в точки.

Упражнения

11. Докажите, что гусеница, оползающая дерево, полученное при помощи конструкции Бернхата, соберет ту же самую правильную расстановку скобок, что и на исходном дереве, если изменит свой алгоритм следующим образом: начнет не с корня, а с нижней вершины; каждый раз, когда поползет вверх, напишет открывающую скобку, а на спуске по ребру вниз – закрывающую.



Рис. 33



Рис. 34

12. Представьте себе, что из каждой почки дерева и из его корня вырастает побег либо вправо, либо влево, либо два побега – и вправо, и влево. На рисун-

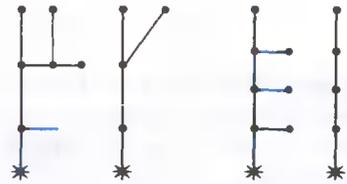


Рис. 35

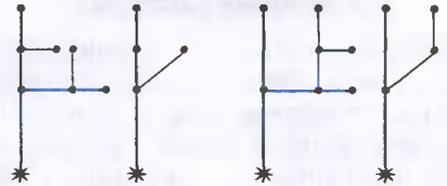


Рис. 36

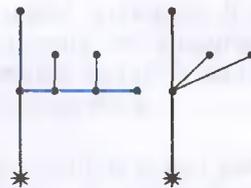


Рис. 37

ках 36, 37 и 38 изображены такие деревья, степени вершин которых не превосходят числа 3, а количества вершин равны, соответственно, 2, 3 и 4. Докажите, что количество таких деревьев с $n - 1$ вершинами равно C_n .

Числа Белла и плоские рифмовки

Числа Белла пересчитывают разбиения n -элементного множества на классы (рисунки 39, 40 и 41 соответствуют значениям $n = 2, 3$ и 4).

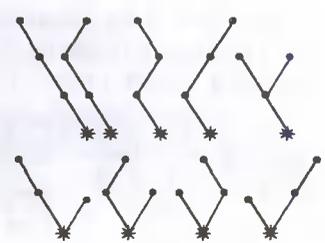


Рис. 38

Для поэта число Белла это количество возможных рифмовок. Например, четверостишие имеет 15 возможных рифмовок (одна из которых – отсутствие какой бы то ни было рифмы). А для 14-строчного

$\widehat{aa} \widehat{ab}$

Рис. 39

$\widehat{aaa} \widehat{aab} \widehat{aba} \widehat{abb} \widehat{abc}$

Рис. 40

$\widehat{aaaa} \widehat{aaab} \widehat{aaba} \widehat{abaa} \widehat{abbb}$

$\widehat{aabb} \widehat{abba} \widehat{abab} \widehat{aabc} \widehat{abac}$

$\widehat{abca} \widehat{abbc} \widehat{abcb} \widehat{abcc} \widehat{abcd}$

Рис. 41

стихотворения способов 190899322 (именно таково 14-е число Белла).

Назовем рифмовки, для которых дуги не пересекаются, плоскими. Как нетрудно убедиться, количество плоских рифмовок с данным числом строк – число Каталана!

Еще несколько конструкций

Есть несколько десятков конструкций, приводящих к числам Каталана. Заинтересованный и искусный в математике читатель может познакомиться с ними на сайте Н.Дж.А.Слоэна «Он-лайн энциклопедия целочисленных последовательностей» (www.research.att.com/~njas/sequences) и по многочисленным публикациям. Я ограничусь лишь несколькими наиболее понравившимися мне конструкциями. Краткости ради, их описания будут не вполне точными. Надеюсь, рисунки помогут восстановить пропущенные детали.

Итак, n -е число Каталана равно количеству

- способов расположить несколько одинаковых бревен, когда в нижнем ряду их $n - 1$ (рис. 42);



Рис. 42

- разбиений изображенной на рисунке 43 фигуры на $n - 1$ прямоугольников, каждый из которых содержит по одной клетке правой границы фигуры;

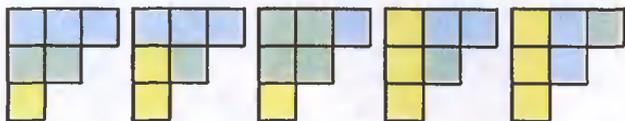


Рис. 43

- путей Дика, т.е. путей, начинающихся в начале координат, не спускающихся ниже оси абсцисс, где каждый шаг – перемещение на единицу вправо и на единицу вверх или вниз, оканчивающихся на оси абсцисс, обладающих $n - 1$ точками локального минимума (другими словами, $n - 2$ пиками) и не имеющих трех подряд идущих шагов в одном и том же направлении (рис. 44);



Рис. 44

- путей Дика, оканчивающихся в точке $(2n; 0)$, ни один из пиков (т.е. локальных максимумов) которых не расположен на высоте 2 (рис. 45);



Рис. 45

- путей Дика, оканчивающихся в точке $(2n; 0)$ и обладающих тем свойством, что длина любой максимальной последовательности подряд идущих шагов «направо-вниз» нечетна (рис. 46);



Рис. 46

- горизонтальных полимино ширины n (рис. 47);



Рис. 47

- симметричных полимино периметра $4(2n - 1)$ (рис. 48);

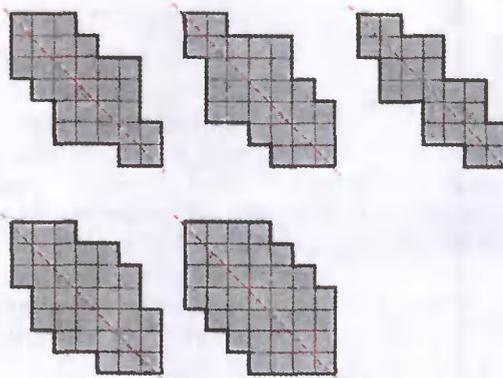


Рис. 48

- полимино периметра $2n$ (рис. 49);

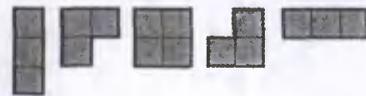


Рис. 49

- последовательностей $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$ натуральных чисел,

удовлетворяющих неравенствам $a_k \leq k$, где $1 \leq k < n$, а именно, при $n = 4$ это последовательности $1 \leq 1 \leq 1$, $1 \leq 1 \leq 2$, $1 \leq 1 \leq 3$, $1 \leq 2 \leq 2$, $1 \leq 2 \leq 3$;

- последовательностей $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-2}$ натуральных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a_k \leq 2k$, где $1 \leq k < n - 1$ (при $n = 4$ это последовательности $1 < 2$, $1 < 3$, $1 < 4$, $2 < 3$, $2 < 4$);

- перестановок σ множества первых $n - 1$ натуральных чисел, для которых нет таких чисел $i < j < k$, что $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$ (для $n = 4$ это перестановки 123, 132, 213, 231 и 321);

- перестановок множества первых $n - 1$ натуральных чисел, которые могут быть превращены в тождественную при помощи стека (рис. 50);

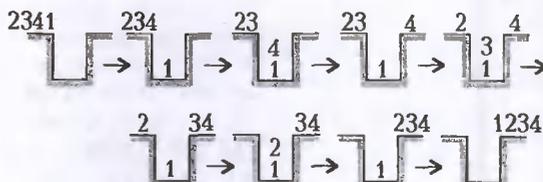


Рис. 50



Рис. 51

• перестановок множества первых $n - 1$ чисел, которые можно преобразовать в тождественную при помощи минимальной маневровой горки (рис.51).

Сейчас речь пойдет о вероятностях (заинтересованному читателю советуем обратиться к соответствующим учебникам). Если для набора равномерно распределенных на одном и том же отрезке независимых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n рассмотреть точки $A_1(1; x_1), A_2(2; x_2), \dots, A_n(n; x_n)$, то вероятность того, что ломаная $A_1A_2 \dots A_n$ выпукла вверх, равна $C_n / (n!)^2$.

Не менее интересно и следующее. Рассмотрим внутри данного квадрата n точек, выбранных случайно и независимо. Пусть для любой из этих точек и для любой области квадрата вероятность того, что точка попадает в эту область, равна отношению площади области к площади квадрата. Оказывается, вероятность того, что все n точек являются вершинами своей выпуклой оболочки, равна $(C_n / (n - 1)!)^2$.

Явные формулы

Рекуррентная формула $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$ требует для вычисления n -го числа Каталана C_n знать все предыдущие значения C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Хотелось бы найти явную формулу, выражающую C_n непосредственно через n . Я изложу три способа: при помощи 1) польской записи; 2) леммы об отражении; 3) производящих функций.

Польская запись

Что такое польская запись, очень хорошо знают программисты, которым приходится учить машину вычислять значения арифметических выражений или производить какие-то другие операции. Рассмотрим, например, арифметическое выражение

$$((1 - 2) + (3 + 4)) : ((5 - 6) \cdot 7 - 8 \cdot 9).$$

Убрать скобки, очевидно, нельзя: порядок действий пострадает. Но давайте вместо $1 - 2$ писать $12-$. И вообще, для любой бинарной операции $*$ вместо $a * b$ будем писать $ab*$. Тогда вместо $(1 - 2) + (3 + 4)$ получим $12 - 34 + +$, а вместо всего выражения получим

$$12 - 34 + +56 - 7 \cdot 89 \cdot - : ,$$

где, заметьте, символ выполняемой в последнюю очередь операции деления оказался на последнем месте. Что, согласитесь, логично! Немного подумав, вы поймете, как при помощи стека компьютер может вычислять (бесскобочное!) польское выражение.

Перейдем к числам Каталана. Каждому произведению с правильно расставленными скобками сопоставим слово из букв a и p по следующему правилу: если выражение состоит лишь из одной буквы, пишем a ; если выражениям U и V уже сопоставлены слова u и v , то

произведению $U \cdot V$ сопоставляем uvp . Например,

$$ab \mapsto aap,$$

$$(ab)c \mapsto aapar$$

$$a(bc) \mapsto aaapp,$$

$$((ab)c)d \mapsto ((aap)c)d \mapsto (aapar)d \mapsto aaparap,$$

$$a(b(cd)) \mapsto aaaappp,$$

$$(a(bc))(de) \mapsto aaappraapp.$$

Как видите, каждому способу вычисления произведения соответствует слово из n букв a и $n - 1$ буквы p . Обратное неверно: например, слова $ppaaa$ или $apaaap$ не могут быть получены с помощью описанной процедуры.

Ситуацию проясняет понятие циклической перестановки. Начнем с примера. Записав буквы слова $СЛОБА$ по кругу, по часовой стрелке сможем прочесть одно из следующих слов:

С Л О В А
Л О В А С
О В А С Л
В А С Л О
А С Л О В

Вообще, слово $a_{k+1} \dots a_n a_1 \dots a_k$ будем называть циклической перестановкой слова $a_1 \dots a_k a_{k+1} \dots a_n$. Оказывается, если W - слово из n букв a и $n - 1$ буквы p , то одно и только одно из циклически сравнимых с W слов получается из некоторой расстановки скобок вышеописанной конструкцией.

Доказать это нетрудно индукцией по n . Среди циклически сравнимых с W слов имеет смысл рассматривать лишь те, которые оканчиваются буквой p . В таком слове W - это тоже легко понять - найдется подслово вида aap . Заменим его буквой a . Мы получили слово, в котором $n - 1$ буква a и $n - 2$ буквы p , а для него применяем индукционное предположение. (На рисунке 52 это показано для $n = 9$.)

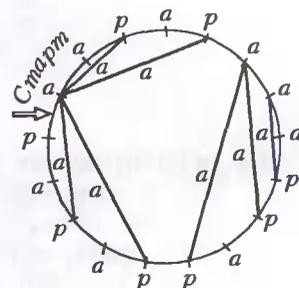


Рис.52. Из всех 17 циклически сравнимых слов только слово $aaaparaaprrararap$

соответствует способу вычисления произведения. Это произведение

$$(((ab)c)((d(ef))g))h)i$$

Теперь выведем формулу для C_n . Среди $2n - 1$ мест мы можем в точности C_{2n-1}^{n-1} способами выбрать $n - 1$ место для букв p . Разделив C_{2n-1}^{n-1} на $2n - 1$, получаем ответ:

$$C_n = \frac{1}{2n - 1} C_{2n-1}^{n-1} = \frac{(2n - 2)!}{(n - 1)!n!}.$$

Упражнение 13. Докажите равенство $C_{n+1} = \frac{4n - 2}{n + 1} C_n$.

Лемма об отражении

Как помните, C_n равно количеству способов так расположить $n - 1$ открывающих и $n - 1$ закрывающих скобок в ряд, чтобы при чтении слева направо ни в

какой момент число прочитанных закрывших скобок не превосходило числа прочитанных открывших. Заменяя («» на «+1», а «)» на «-1», получим, что C_n есть количество последовательностей из $n - 1$ единицы и $n - 1$ минус единицы, суммы всех начальных отрезков которых неотрицательны.

При этом каждой последовательности $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, сопоставляем путь, выходящий из начала координат, i -й отрезок которого ($i = 1, \dots, n$) является отрезком прямой с угловым коэффициентом ε_i , соединяющим точку $(i - 1; \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{i-1})$ с точкой $(i; \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i)$.

Через $N_{n,s}$ обозначим количество путей, начинающихся в начале координат и оканчивающихся в точке $(n; s)$. Очевидно, если среди $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ имеется p единиц и q минус единиц, то $s = p - q$. Поскольку p мест для положительных ε_i выбираются из $n = p + q$ имеющихся мест, $N_{p+q, p-q} = C_{p+q}^p$.

Пусть A и B — точки с целыми координатами, причем B лежит выше оси абсцисс, B' — точка, симметричная B относительно оси абсцисс (рис. 53).

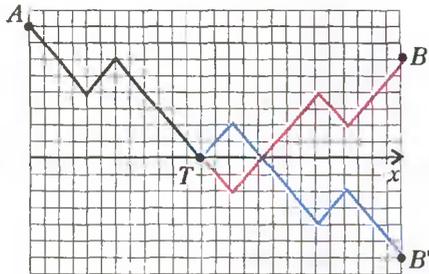


Рис. 53

Лемма об отражении. Количество начинающихся в точке A и оканчивающихся в точке B путей, которые касаются оси абсцисс или пересекают ее, равно количеству путей, оканчивающихся в точке B' .

Доказательство очень простое: если T — самая левая точка пути, попавшая на ось абсцисс, отразите участок TB относительно оси.

Следующая теорема о баллотировке доказана в 1878 году У. Уитвортом и в 1887 году Ж. Бертраном: если на выборах кандидат P набрал p голосов, а кандидат Q набрал q голосов, то вероятность того, что при последовательном подсчете голосов P всё время опережал Q , равна $\frac{p-q}{p+q}$.

Иными словами, если n и s — натуральные числа, то существует ровно $\frac{s}{n} N_{n,s}$ путей из начала координат в точку $(n; s)$, все точки которых, кроме начала координат, расположены выше оси абсцисс.

Доказательство. По лемме об отражении, путей из $(1; 1)$ в $(n; s)$, не задевающих ось абсцисс, имеется ровно

$$N_{n-1, s-1} - N_{n-1, s+1} = C_{p+q-1}^{p-1} - C_{p+q-1}^p.$$

Простая выкладка показывает, что правая часть равна

$$N_{n,s} \frac{p-q}{p+q}.$$

Очевидно, число Каталана C_n получается, если в теореме о баллотировке положить $p = n$ и $q = n - 1$.

Производящая функция

Производящие функции — одно из мощных орудий комбинаторики. Идея состоит в том, чтобы «запакетовать» всю бесконечную последовательность в одно выражение. Производящая функция для последовательности Каталана 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ... — это функция

$$f(x) = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + \dots + 132x^7 + 429x^8 + 1430x^9 + \dots$$

При этом пока нас даже не интересует, для каких x этот степенной ряд сходится: математики говорят в таких случаях, что мы рассматриваем формальный степенной ряд. Поскольку

$$f(x) \cdot f(x) = C_1^2 x^2 + (C_1 C_2 + C_2 C_1) x^3 + \dots + (C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_1) x^n + \dots,$$

то

$$f^2(x) = -x + f(x).$$

(Проверьте!) Решая квадратное уравнение относительно $f(x)$, получаем

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

(Теперь ясно, что ряд для $f(x)$ сходится при $|x| < \frac{1}{4}$. Впрочем, нам это не важно.) Здесь взят знак минус, так как ряд $f(x)$ не имеет свободного члена. Разложив правую часть в ряд по степеням x по биному Ньютона, получаем

$$C_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \dots \left(\frac{3-2n}{2}\right)}{n!} \cdot (-4)^n.$$

Упростив это выражение, окончательно получаем

$$C_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

Упражнение 14. Рассматривая производящую функцию

$$F(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n x^n,$$

выведите явную формулу n -го члена последовательности Фибоначчи, заданной начальными членами $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ и рекуррентным соотношением $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$.

О рельефе коры на стволе дерева

А.МИНЕЕВ

В СТВОЛЕ ЛЮБОГО ДЕРЕВА ИМЕЕТСЯ ГРУППА клеток, которые делятся не переставая в течение всей его жизни. Каждый год такие клетки — они образуют камбий — «откладывают» по несколько слоев новых клеток как внутрь, так и наружу ствола и являются основной причиной его постепенного утолщения. Продуктом деятельности камбия являются знаковые всем годовые кольца.

В горизонтальном срезе ствола дерева клетки камбия имеют вид тонкого слоя вблизи внешней поверхности (рис. 1, а), в вертикальном срезе ствола камбий имеет форму, близкую к конусу (рис. 1, б).

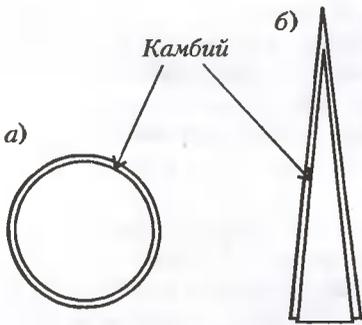


Рис.1. Положение камбия в стволе дерева

Расположение камбия в стволе дерева замечательно по ряду причин. Во-первых, изнутри к камбию прилегает несколько слоев клеток, по которым вода и минеральные соли поднимаются по стволу дерева *вверх* к листьям — это так называемая ксилема, а снаружи находятся слои клеток, по которым летом происходит транспортировка продуктов фотосинтеза в основном *вниз* к корням — эти слои образуют флоэму (рис. 2).

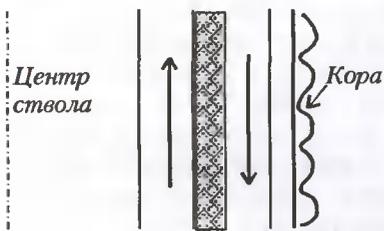


Рис.2. Расположение камбия относительно прилегающих слоев; показано направление подъема воды *вверх* и потока органических веществ *вниз*

(Весной течение сока по флоэме может быть восходящим, от корней, что приводит у берез, например, к образованию березового сока.) В результате камбий разделяет два типа потока воды по дереву, находясь в наиболее благоприятном с точки зрения питания месте — все «жизненные соки» дерева проходят вблизи него.

Во-вторых, при удалении от камбия на несколько слоев клеток наружу и внутрь обмен веществ в стволе дерева резко замедляется. Вблизи центра ствола дерева образуется область — ядро, до которой питательные вещества практически не доходят, то же происходит и снаружи от камбия — там образуется кора дерева

(рис. 3). Ядро и кора дерева выполняют специфические функции, обеспечивая, соответственно, прочность дерева и его тепло- и водоизоляцию.

В некотором смысле камбий является одним из критических элементов дерева, где сходится множество функций. Если качественно изобразить активность жизнедеятельности по сечению ствола растущего дерева, то можно заметить, что по стволу как бы распространяется



Рис.3. Сердцевина (ядро) и периферия (кора) ствола дерева



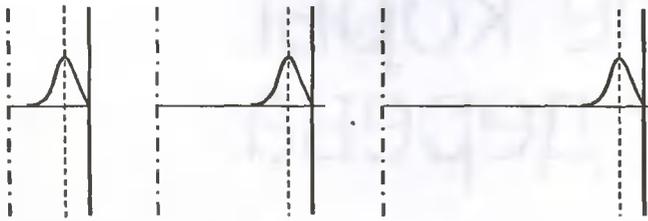


Рис.4. Распространение «волны жизни» по сечению дерева по мере его утолщения; штриховая линия – положение камбия

«волна жизни» (рис.4). Благодаря деятельности камбия, утолщение ствола дерева не происходит прямо с наружной его поверхности, а начинается с более внутренних слоев. Это приводит к ряду необычных задач, относящихся как к функционированию камбия, так и к толщине и структуре образующейся коры дерева.

Обсудим ряд конкретных вопросов.

Задача 1. Наружу и внутрь

Допустим, что клетки «откладываются» камбием поровну наружу и внутрь, а также что эти клетки развиваются до одинакового поперечного размера, после чего постепенно одревесневают и теряют свойство сильно менять размеры. Зададимся вопросом: где будет располагаться слой камбия в стволе дерева с течением времени?

Ответ можно получить, приравняв поперечные сечения ствола от оси до камбия и от камбия до внешней поверхности ствола. Обозначив диаметр камбия d_k , а ствола d , имеем

$$\pi d_k^2 \approx \pi d^2 - \pi d_k^2,$$

или

$$\frac{d_k}{d} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7.$$

Ответ выглядит обескураживающим и не соответствующим реальности. Так, в стволе березы диаметром $d \approx 30$ см камбий, согласно полученному результату, должен находиться от поверхности ствола на глубине около 4,5 см! За камбием на внешней части ствола должна формироваться кора. Но если посмотреть на березовый пень, то можно заметить, что у березы кора такой толщины явно не образуется. Это означает, что какие-то из наших исходных предположений неверны.

В то же время было доказано, что камбий действительно «откладывает» клетки поровну наружу и внутрь ствола. Значит, либо эти клетки впоследствии развиваются по-разному, либо какие-то изменения в стволе снаружи камбия происходят раньше, до того как слой коры станет очень большим.

В этом случае несколько проясняет обстановку вторая задача.

Задача 2. Оценка максимальной толщины коры дерева

Итак, на стволе, который обязан быть прочным (иначе дерево сломается и прекратит существование), имеется объект иного рода – кора. Кора контактирует

со стволом, но не может сильно менять размеры. А так как периметр камбия в ходе роста дерева увеличивается, кора обязана периодически разрываться.

Слой снаружи камбия со временем одревесневает. В результате по мере утолщения ствола дерева в одревесневшем слое будет расти механическое напряжение:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)E,$$

где $\varepsilon(t)$ – растущее со временем относительное утолщение ствола, E – модуль упругости. При достижении предела прочности на растяжение одревесневший слой треснет. Произойдет изменение структуры дерева – разрыв. Со временем кора после таких многократных разрывов приобретет характерный «морщинистый», бугристый вид.

Оценку максимальной толщины слоя коры Δ_k можно сделать, пожив деформацию ε равной предельно допустимому значению ε_{\max} . Тогда при $\varepsilon_{\max} \sim 2-4\%$ получим

$$\Delta_k \sim \frac{d}{2} \varepsilon_{\max} \sim (1-2) \cdot 10^{-2} d.$$

Отсюда для березы диаметром $d \approx 30$ см получаем толщину коры в несколько миллиметров. А для очень толстых деревьев с диаметром ствола порядка 1–2 м толщина коры может составить уже несколько сантиметров. Если же принять, что разрывы коры по мере роста дерева могут происходить неоднократно без отделения коры от ствола дерева, то толщина коры может быть еще больше.

Но кора не является только «паразитным» наружным наростом на стволе дерева, она выполняет функции «шубы» – тепло- и водоизоляции и защиты ствола дерева от повреждений. Поэтому трещины в коре должны постепенно зарастать или покрываться защитным слоем. В хвойных деревьях роль такого защитного слоя выполняет смола.

Отметим, что задачи, относящиеся к форме коры, которая образуется на поверхности ствола дерева, существенно отличаются от задач хорошо развитой науки о прочности (сопромат). Там наиболее важным является не доведение до предела прочности, поскольку выход за этот предел приводит к разрушению конструкции. В таком режиме «работает» ствол дерева – он не должен треснуть, иначе дерево разрушится. В случае коры ситуация совершенно другая. Кора, располагаясь на утолщающемся со временем стволе, постепенно как бы затвердевает и теряя пластичность, обязана периодически разрываться. Таким образом, образование коры на стволе дерева и ее форма – это то, что происходит за пределами прочности коры.

Задача 3. «Сосисочный закон»

Под таким игривым названием зашифрована вспомогательная задача о характере разрыва сосиски при ее нагревании, результат которой полезен при анализе формообразования коры у деревьев.

Нагрев приводит к появлению внутреннего распирающего давления p , приложенного к наружной оболочке сосиски. В результате возникают напряжения в

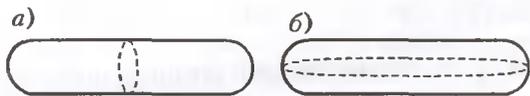


Рис.5. Сечения (показаны пунктиром), в которых развиваются напряжения в сосиске под действием внутреннего давления

оболочке (рис.5), стремящиеся разорвать сосиску на две более короткие:

$$\sigma_a = p \frac{R}{2h}$$

и приводящие к образованию продольного разрыва оболочки сосиски:

$$\sigma_b = p \frac{R}{h},$$

где R – радиус сосиски, h – толщина внешней удерживающей оболочки.

Сопоставление этих соотношений показывает, что напряжения, приводящие к образованию продольного разрыва, *вдвое* превышают те, которые стремятся разорвать сосиску на две более короткие. В результате передержанная в горячей воде сосиска всегда разрывается вдоль.

Отметим два важных отличия рассмотренного примера от характера разрывов при образовании коры у деревьев.

1) Свойства оболочки сосиски примерно одинаковы как в продольном, так и окружном направлениях (т.е. имеет место изотропия ее механических свойств). Кора же дерева может обладать анизотропией свойств, в результате могут иметь место как разрывы вдоль ствола, так и в окружном направлении.

2) Механические прочностные свойства внутренней («съедаемой») части сосиски существенно ниже, чем у оболочки. В результате у сосиски имеет место только *один* разрыв, который приводит к выворачиванию практически не обладающей прочностью внутренности сосиски наружу. В случае ствола дерева имеет место обратная ситуация – его механическая прочность существенно выше, чем у коры. В результате могут иметь место не один, а множество разрывов коры как вдоль, так и поперек ствола дерева.

Задача 4. Рельефы коры у дерева

Теперь мы вооружены достаточным количеством знаний, чтобы попытаться найти подходы к решению основной задачи – к обзору возможных видов рельефов на коре деревьев и сопоставлением их с ситуацией, реализующейся в природе.

Простейшая структура возникает, когда кора слабо связана со стволом дерева и «сбрасывается» при достижении критической толщины. Такой тип коры наблюдается у ряда тропических деревьев, которые сбрасы-

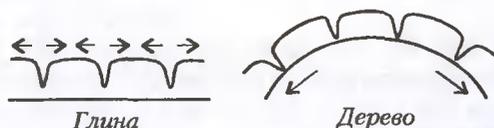


Рис.6. Иллюстрация к аналогии между отвердеванием глины и образованием коры на стволе дерева

вают кору каждый год. В этом случае, поскольку кора после разрыва оказывается практически не связанной со стволом, продольный разрыв один, и кора как шкурка «сбрасывается» деревом в соответствии с «сосисочным законом».

Если же «крепление» коры к стволу дерева достаточно хорошее, то она в ходе утолщения дерева испытывает множество разрывов. В этом случае можно провести аналогию между формой разрывов коры дерева и структурой трещин при затвердевании поверхности глины. Правда, при затвердевании глины появление трещин связано с уменьшением объема глины, и напряжения при таком «укорочении» наружной поверхности глины релаксируют с образованием довольно причудливой структуры трещин, в случае же коры на стволе растущего дерева имеет место «растягивание» ствола – своеобразной подложки, на которой закреплена кора (рис.6).

Перейдем к примерам реальной структуры коры деревьев в природе, воспользовавшись замечательным справочником (Кремер Б.П. Деревья: местные и завезенные виды Европы. – М., 2002), содержащим множество иллюстраций структуры коры у различных деревьев. Их многообразие связано со свойствами коры и анизотропией этих свойств в горизонтальном и вертикальном направлениях по стволу, а также с характером крепления коры к подложке, т.е. к стволу дерева.

Первые два примера (рис.7) относятся к преимущественно вертикальной структуре разрывов на поверхности дерева (дуб, сосна). Проявления «сосисочного закона» здесь отчетливо наблюдаются.

Другой характер образования коры у березы. Кора березы – береста – имеет резко выделенную анизотропию свойств: она очень прочна *вдоль* волокон (и способна в этом направлении сильно растягиваться) и

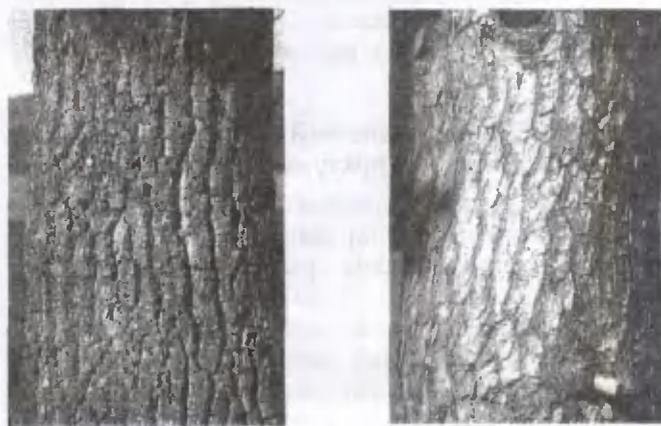


Рис.7. Примеры вертикального рельефа коры дерева у дуба и сосны (трещины по коре преимущественно вертикальные)

обладает малой прочностью поперек волокон. В результате разрывы на поверхности коры (рис.8) носят либо преимущественно горизонтальный характер (как у березы каменной), либо имеет место чередование отдельных вертикальных и горизонтальных разрывов (как у березы повислой).



Береза каменная



Береза повислая

Рис.8. Горизонтальные и вертикальные трещины на коре берез



Араукария

Рис.9. Паркетная форма трещин на поверхности коры араукарии

Последний пример весьма причудливой и эффектной формы коры араукарии представлен на рисунке 9. Кстати, эта форма наиболее напоминает форму трещин на поверхности глины. Если присмотреться, то можно заметить характерный пирамидальный вид боковой поверхности коры, что можно рассматривать как иллюстрацию многолетнего образования трещин. При этом ранее образовавшиеся слои коры кажутся более узкими, чем более поздние.

В такой «паркетной» структуре коры дерева первое, что вызывает вопросы, это характерный размер и количество граней у многогранников коры. Та же проблема ширины ячеек встает и в случае вертикального рельефа коры, как в случае дуба или сосны.

Некоторый свет на эти вопросы проливает решение следующей задачи.

Задача 5. Минимальный размер и форма «паркетной» структуры коры дерева

Для решения этой задачи нужно сначала определить, какие силы стремятся сохранить конфигурацию коры (без сетки трещин), а какие – разрушить (т.е. привести к образованию трещин). Чтобы приобрести некоторый навык, попытаемся для начала найти соответствующий механизм в более простых ситуациях.

Выясним, например, что определяет максимальный размер капли воды. Форма капли связана с действием сил поверхностного натяжения, которые стремятся уменьшить до минимума ее поверхность. В результате пока силы поверхностного натяжения (пропорциональные длине окружности капли l) гораздо больше других сил, эта форма остается близкой к сферической. По мере роста капли все быстрее (пропорционально объему V) растет ее сила тяжести. И тогда капля на поверхности стола сплющивается, а висят на потолке вытягивается вниз и все более отклоняется от сферической формы. Наконец, начиная с некоторого

размера, гравитационные силы становятся преобладающими, и висят капля отрывается с потолка. Таким образом, размер капли можно оценить, приравняв ее силу тяжести силе поверхностного натяжения:

$$\rho g V \approx \alpha l.$$

Полагая $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $l = 2\pi r$ и приняв для воды при 20 °C $\rho = 10^3$ кг/м³ и $\alpha = 0,07$ Н/м, можно получить оценку размера капли воды:

$$r \sim \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}} \sim 3 \text{ мм}.$$

До некоторой степени аналогичный баланс сил помогает объяснить образование трещин в коре дерева или трещин на поверхности засохшей глины и максимальный размер «ячеек» без трещин. Так, в узком слое глины, расположенном на неподвижной поверхности, при высыхании наружная поверхность глины сжимается, объем глины изменяется и в ней возникают напряжения. Удельную плотность упругой энергии деформации можно оценить как $\frac{\sigma^2}{2E}$. Тогда при площади и толщине слоя глины, соответственно, S и d энергия деформации оказывается порядка

$$W_d \approx \frac{\sigma^2}{2E} Sd.$$

Если уровень напряжений в материале превышает предел прочности, то появляются условия для образования трещин. При этом само появление трещин приводит к определенной «разрядке» напряжений и образованию новых поверхностей в материале – поверхностей разрыва, формируемых трещинами. Для образования таких новых поверхностей нужно затратить определенную энергию. Эта энергия пропорциональна величине новой поверхности. Если считать, что по краям поверхности, имеющей для простоты квадратную форму с размером ячейки a , образуются трещины,

то длина образовавшихся трещин будет $l_T \approx 2a$ (трещина имеет две поверхности). Если принять, что трещины проникают на всю толщину материала d , то энергию, пошедшую на образование трещин, можно записать в виде

$$W_T \approx \lambda_T d,$$

где λ – коэффициент пропорциональности, имеющий размерность



Рис.10. Зависимость частоты появления от числа сторон паркетной структуры коры араукарии

Дж/м² или Н/м. Видно, что формально λ имеет смысл поверхностного натяжения. Его можно назвать также удельной энергией разрушения (приходящейся на единицу поверхности). В литературе имеется много разрозненной информации о величине λ . Для коры

деревьев и глины мы примем оценку $\lambda \approx (200 - 1000) \text{ Дж/м}^2$. Такого же уровня величина λ , скажем, у полистирола или оргстекла. У металлов она в 3–10 раз больше.

Будем считать, что основная часть энергии деформации переходит в энергию образования новых поверхностей (т.е. трещин). Тогда, приняв $S \sim l_T^2$ и приравняв W_T и W_d , для характерного размера паркета a_0 , ограниченного трещинами, получим

$$\frac{\sigma^2}{2E} a_0^2 d \approx \lambda \cdot 2a_0 d,$$

откуда

$$a_0 \approx \frac{4\lambda E}{\sigma^2}.$$

Видно, что окончательное выражение содержит комбинацию из трех не слишком хорошо известных величин: λ , E и σ . Тем не менее, сделаем оценки до конца. Для модуля Юнга E и допустимого уровня напряжений σ примем значения $E \approx 2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ и $\sigma \approx 10^7 \text{ Н/м}^2$. Тогда при $\lambda \approx (200 - 1000) \text{ Дж/м}^2$ получаем такой размер «паркета»: $a_0 \approx (2 - 8) \cdot 10^{-2} \text{ м}$, т.е. несколько сантиметров. Паркет с трещинами меньших размеров не должен иметь места, так как для образования таких трещин не хватает упругой энергии. В паркете же с

существенно большими размерами энергии, пошедшей на образование трещин на границе паркета, уже не хватит для «разгрузки» упругой энергии деформации.

Форма образующегося паркета с трещинами в качестве границ (см. рис.9) имеет, как правило, вид многогранника с числом сторон 3–7. На рисунке 10 приведено распределение частоты появления многогранников по числу их сторон для рассматриваемого примера видимой части коры на стволе араукарии (распределение получено по данным рисунка 9). Как следует из рисунка 10, максимум числа сторон паркета приходится на 5–6 граней, что недалеко от оптимального значения при покрытиях плоскости многогранниками, близкими к правильным.

Первые трещины на коре дерева служат основой для дальнейшего формирования паркетной структуры коры дерева. По мере утолщения коры форма паркета уже слабо меняется и образует характерную пирамидальную структуру. Нужно отметить, что на начальное формирование паркетного покрытия коры, естественно, оказывают влияние различные неоднородности. Ими могут быть, скажем, ветки на стволе дерева, вблизи которых формируется своя локальная структура паркета коры (как видно, например, на рисунке 7 у ствола сосны).



Игорь Федорович Шарыгин
(1937–2004)

12 марта 2004 года скончался член редакционной коллегии журнала «Квант» Игорь Федорович Шарыгин, выдающийся деятель просвещения, ученый, педагог, популяризатор науки.

Роль И.Ф.Шарыгина в математическом просвещении несравненна. В одной из своих последних статей Игорь Федорович написал, что история человечества пишется в трех книгах — книге Борьбы, книге Любви и книге

Мысли. Ему было суждено вписать замечательные страницы в каждую из этих книг.

Игорь Федорович был человеком всепоглощающей страсти. На протяжении всей своей творческой жизни он страстно боролся за математическое просвещение, считая его средством для возрождения и развития нашей Родины. Его любовью была Геометрия. И.Ф.Шарыгин был, быть может, самым выдающимся творцом в элементарной геометрии нашего времени. Он был убежден в том, что именно геометрия является наиболее полезным, «экологически чистым» (как он сам любил выражаться) продуктом для умственного развития личности. Все свои силы Игорь Федорович отдавал агитации за геометрию, пропаганде ее, он был ее защитником. Его восторг перед любимой наукой нашел отражение во множестве написанных им книг, в его статьях (в частности, в «Кванте»), в его лекциях, которые он читал для школьников и учителей во многих городах нашей страны и за ее рубежами.

Игорь Федорович был глубоким мыслителем, человеком широкого кругозора и высокой культуры. Он был Рыцарем в самом возвышенном значении этого слова, бесстрашным и непреклонным борцом, отстаивающим истину, преклонявшимся перед красотой человеческой мысли.

Наш долг продолжить дело, которому посвятил свою жизнь Игорь Федорович Шарыгин.

*Редакционная коллегия, редакционный совет,
редакция журнала «Квант»*

Демокрит и учение об атомах

А. ВАСИЛЬЕВ

СОЗДАТЕЛЬ АТОМИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДЕМОКРИТ прожил девяносто (или сто двадцать?) лет – приблизительно с 460 по 370 год до н.э. Согласно Диогену Лаэртскому, маленький Демокрит часами просиживал на коленях персидских астрономов, возвращавшихся с Дариевыми войсками через его родную Абдеру домой. Полученных от персидских волшебников знаний юному Демокриту явно недоставало, да и в округе спросить было некого. После смерти отца, богатого комедианта, Демокрит отправился в поисках истины в дальнее путешествие. Дорожные расходы по замкнутому маршруту Греция–Египет–Эфиопия–Персия–Индия–Греция с лихвой перекрыли полученное им наследство, так что хлеб насущный он вынужден был добывать публичными лекциями.

Петроний (год рождения неизвестен – 66 н.э.) через пятьсот лет как-то вспоминал, что особенно хорошо Демокриту давались благоприятные прогнозы погоды, которая в те безмятежные времена и впрямь не оставляла желать лучшего. Местные жители доверяли ученому и неоднократно предлагали ему заняться общественно полезным трудом. Однако, как и подобает мыслителю, Демокрит решительно отвергал эти поползновения и предпочитал тихую жизнь затворника в башне из слоновой кости.

Некоторые полагают, что в этой башне Демокрит проводил свободное время в поисках философского камня. Эта гипотеза, однако, не выдерживает критики, просто проецируя мечты средневековых алхимиков на седую древность. Также не задокументированы беседы Демокрита с Гиппократом (около 460 – около 370 до н.э.), в которых предположительно шла речь о душевных расстройствах мыслителя. Особенностью характера Демокрита являлась привычка подтрунивать над людскими слабостями. Современник Петрония Сенека (около 4 до н.э. – 65 н.э.) писал, что философ редко появлялся на публике, без того чтобы не насмеяться над кем-нибудь. Трудно поверить и в то, что, согласно легенде, к концу своих дней Демокрит ослепил себя с помощью увеличительного стекла. Во-первых, неясно, где он мог его взять, а во-вторых, историки полагают, что в этой ситуации ему трудно было бы писать книги и препарировать для научных целей животных. Из семидесяти написанных им книг, не говоря уже о препарированных животных, не сохранилось ни одной, так что неопровержимые данные о жизненном пути первого атомиста передавались из уст в уста.

Собственно, атомистическая теория возникла в противовес гипотезе элеатов¹ о том, что «все одно и то же». Из

этой реакционной гипотезы вытекало, что всяческое изменение и продвижение к лучшему не более чем иллюзия. Парменид же вообще сказал, что и меняться некуда, потому что нет никакого вакуума (если есть нечто, что является ничем...), чем окончательно запутал дело.

Для прояснения ситуации потребовался весь гений философа-материалиста. Для противостояния Пармениду Демокрит выдвинул концепцию атомов, движущихся в пустом пространстве. Постулатом об этом пространстве в отсутствие атомов сразу же было доказано и существование вакуума. Чтобы преодолеть трудности в определении точки отсчета времени, Демокрит предположил, что такой точки вообще никогда не было, поскольку наблюдаемая в настоящий момент материя существовала всегда, равно как всегда существовало и вечное движение. Справедливости ради, следует отметить, что даже Ньютон, два тысячелетия спустя, не смог проследить до конца логику опередившего свое время грека.

Никому из предшественников Демокрита не удалось сформулировать удовлетворительное описание материи. Лишь он, опираясь на разум и чувства, показал, что природа состоит из бесконечно большого числа чрезвычайно малых частиц, названных атомами, т.е. неделимыми. Согласно воззрениям атомистов, полностью заполненные изнутри атомы размещаются в пустоте. Атомы различаются формой и размером и находятся в постоянном хаотическом движении. В качестве поэтического образа для описания этого движения Демокрит выбрал полет мошкары в ясный солнечный день при отсутствии ветра. Движущиеся атомы неизбежно сталкиваются в пространстве, что в некоторых случаях заставляет их отклоняться от исходного направления. В другой ситуации атомы могут слипаться при столкновениях, образуя доступные наблюдению комплексы. Сегодня неясно, считали ли атомисты первичными элементами воду, воздух, огонь и землю, но они правильно указали, что все эти сущности состоят из мельчайших частиц.

Материалистические воззрения Демокрита не получили широкого распространения у современников и ближайших последователей. Платон (428 или 427 – 348 или 347 до н.э.), например, никогда не ссылаясь на Демокрита, а Аристотель (384 – 322 до н.э.), сам не во всем согласный с Платоном, отвергал вакуум («природа не терпит пустоты») и склонялся к мысли о бесконечной делимости материи. В то же время, теория Демокрита была бережно сохранена древними греками и из рук в руки передана древним римлянам. А уж те позаботились донести ее до средневековых ученых. Последующие исследования лишь укрепили и развили заложенные в античности атомистические представления.

¹ Элеаты – представители философской школы, основанной в Элее. Главными апологетами этой школы были Парменид и Зенон. Элеаты учили о единстве всего сущего, об иллюзорности воспринимаемого чувствами мира явлений.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

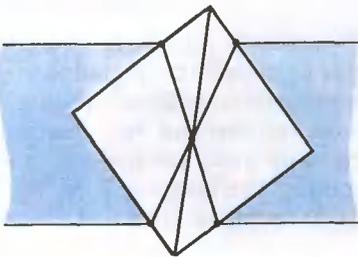
Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2004 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3-2004» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1906» или «Ф1913». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1906–М1915, Ф1913–Ф1922

М1906. На полосу положили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, притом так, что его граница



пересекла границу полосы в четырех точках (см. рисунок). Докажите, что две прямые, проходящие накрест через эти точки, пересекаются на диагонали квадрата.

В.Произволов

М1907. а) Число $9^{2004} - 1$ представили в виде суммы некоторого количества степеней тройки с целыми неотрицательными показателями. Каково наименьшее возможное количество слагаемых в этой сумме?

б) Число $2004! - 1$ представили в виде суммы некоторого количества факториалов. Каково наименьшее возможное количество слагаемых в этой сумме?

Б.Френкин, В.Сендеров

М1908. Каждая пара (a, b) натуральных чисел порождает пару $((x_n), (y_n))$ последовательностей по формулам $x_1 = a, y_1 = b, x_{n+1} = x_n y_n, y_{n+1} = x_n + y_n$. Докажите, что при любой паре (a, b) найдется такое n , что $x_n > y_n$. Обозначим наименьшее из таких чисел через $f(a, b)$. При какой паре (a, b) число $f(a, b)$ максимально?

А.Саранцев

М1909. Девять горизонтальных и девять вертикальных прямых разрежали прямоугольник на 100 прямоугольников, 91 из которых синие, а остальные – красные. Периметр каждого синего прямоугольника является целым числом. Докажите, что периметр каждого красного прямоугольника – целое число.

В.Произволов

М1910. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята внутренняя точка D ; точки O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников ACD и $B CD$ соответственно. Пусть E – точка пересечения прямых BO_1 и AO_2 . Докажите, что $\angle BCE = \angle ACD$.

А.Васильев (16 лет)

М1911. Числа a, b, c, d удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a^n + b^n = c^n + d^n, \\ a^m + b^m = c^m + d^m, \end{cases}$$

где m и n – натуральные числа, $n > m$;

$$M = \{|a|, |b|, |c|, |d|\}.$$

Докажите следующие утверждения.

а) Если m и n – числа одной четности, то среди элементов множества M найдутся совпадающие.

б) Если n четно, m нечетно, то справедливо заключение пункта а).

в) Если m четно, n нечетно, то существуют такие числа a, b, c, d , что элементы множества M попарно различны.

В.Сендеров

M1912. Гирьки 1 г, 2 г, 3 г, ..., 200 г разложили по 100 штук на каждую чашку весов так, что веса показали равновесие. При этом никакие две гирьки левой чашки весов не дают в сумме 201 г. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$ – массы гирек левой чашки весов, а $b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_{100}$ массы гирек правой чашки. Докажите равенство

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 100a_{100} = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots + 100b_{100}.$$

В.Произволов

M1913. Пусть $0 \leq x, y \leq 1$. Докажите неравенство

$$2\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} \leq 2(x - 1)(y - 1) + 1.$$

В.Дольников

M1914. Заданная на прямой R функция f такова, что

- 1) $f(2 + x) = f(2 - x)$ для всех x ;
- 2) $f(7 + x) = f(7 - x)$ для всех x ;
- 3) $f(0) = 0$.

а) Может ли функция f принимать ровно два значения? А бесконечное число значений?

б) Найдите все возможные значения наибольшего корня уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[0; 1000]$.

П.Самовол

M1915. В тетраэдре $ABCD$ имеют место равенства $AB = BC = CD = a$, $BD = DA = AC = b$. Найдите расстояние между прямыми AD и BC .

А.Заславский

Ф1913. На плоскости в вершинах правильного треугольника со стороной L находятся три маленькие черепахи. По сигналу они начинают двигаться с постоянными по величине скоростями v_0 , причем каждая черепаха в данный момент движется точно на свою соседку по часовой стрелке. Найдите ускорение черепахи в зависимости от времени.

З.Повторов

Ф1914. Очень легкая катушка ниток с внешним радиусом $R = 4$ см и внутренним $r = 3$ см (радиус катушки нити) находится на горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения $\mu = 0,6$. На оси катушки закреплен тонкий тяжелый стержень массой $M = 0,2$ кг. Катушку тянут за горизонтальный кусок намотанной на нее нити силой $F = 1$ Н. Найдите ускорение оси катушки.

Р.Александров

Ф1915. Блок представляет собой легкий однородный диск радиусом R , в котором по центру сделана круглая дырка радиусом r и через эту дырку проходит горизонтальная закрепленная ось чуть меньшего радиуса. Коэффициент трения между осью и диском μ . Через блок переброшена легкая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы с массами M и m . Найдите ускорение груза массой M и натяжение нити в точке подвеса этого груза.

А.Блоков

Ф1916. В сосуде объемом 1 л находится гелий при температуре 300 К. Плотность газа такова, что длина свободного пробега в нем составляет 0,5 мкм. Понаб-

людаем за одной из частиц, которая только что ударилась об одну из стенок сосуда. Каковы ее шансы удариться о противоположную стенку сосуда раньше чем через 0,5 с после этого?

З.Броуновский

Ф1917. В очень большом теплоизолированном сосуде находится порция азота. Газ сжали до объема 1 л, при этом его давление составило 0,5 атм. Найдите совершенную при сжатии работу.

А.Диабатов

Ф1918. Две концентрические проводящие сферы не заряжены, а в пространстве между ними, на расстоянии L от центра, закреплен точечный заряд Q . Найдите разность потенциалов между сферами. Какой заряд протечет по тонкому проводнику, если соединить этим проводником сферы?

З.Повторов

Ф1919. Медная монета диаметром D и толщиной h скользит плашмя по горизонтальному столу с постоянной скоростью v . Магнитное поле имеет индукцию B и направлено горизонтально под углом φ к направлению вектора скорости. Найдите заряды, которые возникают на плоских поверхностях монеты (монету считать очень тонкой).

А.Простов

Ф1920. Две одинаковые катушки индуктивностью L каждая соединены последовательно и подключены концами к источнику переменного напряжения частоты ω . Параллельно одной из катушек подключают конденсатор. При какой емкости этого конденсатора напряжения катушек окажутся одинаковыми по величине?

А.Катушкин

Ф1921. При помощи собирающей линзы получают действительное изображение источника света, который представляет собой короткий прямолинейный отрезок, расположенный на главной оптической оси линзы перпендикулярно этой оси. При этом увеличение составляет $\Gamma = 0,1$. Каким станет увеличение, если повернуть отрезок так, чтобы он составил угол $\alpha = 45^\circ$ с осью линзы?

З.Рафаилов

Ф1922. Плоская волна длиной $\lambda = 0,5$ мм падает перпендикулярно на непрозрачный экран, в котором прорезаны четыре параллельные щели шириной $d = 0,2$ мм каждая, а расстояние между соседними щелями $D = 5$ мм. Вначале стандартный вопрос – найдите угол между нормалью к экрану и направлением на первый минимум излучения. Затем закроем одну из щелей (конечно же, не крайнюю). В каком направлении теперь наблюдается первый минимум? Во сколько раз отличаются интенсивности излучения в главном максимуме и в этом минимуме? («Интенсивность» – это мощность.)

А.Зильберман

Решения задач M1886–M1890, Ф1898–Ф1907

M1886. На столе лежат картинками вниз 8 играль-ных карт. Вы можете указать на любую группу карт

(в частности, на одну карту или, например, на все 8) и спросить, сколько карт бубновой масти в этой группе. В качестве ответа вам сообщат число, отличающееся от истинного значения на 1. Как при помощи 5 вопросов наверняка узнать число бубновых карт, лежащих на столе?

Обозначив карты буквами A, B, C, D, E, F, G и H , приведем один из способов. Первый вопрос – о всех 8 картах; пусть в качестве ответа на него предложено число k . Три следующих вопроса – о парах (A, B) , (C, D) и (E, F) . Поскольку каждый ответ позволяет определить четность числа бубновых карт в соответствующей группе, то эта четность станет известна для пар (A, B) , (C, D) , (E, F) и (G, H) . Ясно также, что если число бубновых карт в паре нечетно, то оно равно 1; пусть среди указанных четырех пар ровно l содержат по одной бубновой карте.

Для пятого вопроса сформируем группу, состоящую из $4 - l$ карт, по одной из каждой пары, где число бубновых карт четно (т.е. равно 0 либо 2). Эти $4 - l$ пар содержат в общей сложности $k + 1 - l$ либо $k - 1 - l$ карт бубновой масти, а сформированная группа – вдвое меньшее их количество, т.е.

$$\frac{k + 1 - l}{2} \text{ либо } \frac{k - 1 - l}{2}.$$

Но числа

$$\frac{k + 1 - l}{2} \text{ и } \frac{k - 1 - l}{2}$$

отличаются друг от друга на 1, и очевидно, что получив в качестве ответа число, на 1 отличающееся от истинного значения, мы это истинное значение (пусть оно равно m) сразу определим. Определился и общее число бубновых карт на столе – оно равно

$$2m + l.$$

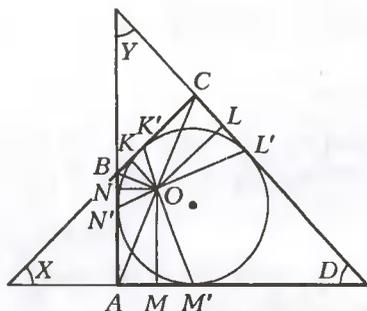
С.Токарев

M1887. Из точки пересечения диагоналей O описанного четырехугольника $ABCD$ опущены последовательно перпендикуляры OK, OL, OM, ON на его стороны. Докажите, что $1/OK + 1/OM = 1/OL + 1/ON$.

Можно доказать, что $1/OK + 1/OM = 1/OL + 1/ON$ тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ описанный.

Пусть четырехугольник описанный, K', L', M', N' – точки касания вписанной окружности с его сторонами, X, Y – углы между противоположными сторонами. Тогда прямые $K'M'$ и $L'N'$ проходят через O (см. рисунок). Доказать это можно, например, с помощью

теоремы Брианшона, утверждающей, что главные диагонали описанного около окружности шестиугольника пересекаются в одной точке (четыреугольник можно рассматривать как вырожденный шестиугольник, два проти-



воположных угла которого равны π). Другой способ доказательства связан с проективными преобразованиями. (С ним можно познакомиться в статье «Некоторые факты проективной геометрии» – «Квант» №1 за 1996 год, или в недавно вышедшей книге «Геометрические преобразования» – М.: МЦНМО, 2003.)

Далее, углы, образованные прямой $K'M'$ с соответствующими сторонами четырехугольника, равны как углы между хордой и касательными, проведенными через ее концы. Следовательно,

$$OK/OK' = OM/OM' = \cos(X/2).$$

Аналогично,

$$OL/OL' = ON/ON' = \cos(Y/2).$$

Отсюда и из соотношений $K'M' = 2r \cos(X/2)$, $L'N' = 2r \cos(Y/2)$, $OK' \cdot OM' = OL' \cdot ON'$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{OK} + \frac{1}{OM} &= \left(\frac{1}{OK'} + \frac{1}{OM'} \right) / \cos \frac{X}{2} = \\ &= \frac{K'M'}{OK' \cdot OM' \cdot \cos \frac{X}{2}} = \frac{2r}{OK' \cdot OM'} = \\ &= \frac{2r}{OL' \cdot ON'} = \frac{1}{OL} + \frac{1}{ON}. \end{aligned}$$

Для доказательства обратного утверждения зафиксируем расстояния a, b, c, d от точки O до вершин четырехугольника и будем искать угол φ между его диагоналями, при котором $1/OK + 1/OM = 1/OL + 1/ON$. Так как

$$\frac{1}{OK} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}}{2ab \sin \varphi}$$

и т.д., получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos \varphi}}{cd} = \\ = \frac{\sqrt{a^2 + d^2 + 2ad \cos \varphi}}{ad} + \frac{\sqrt{c^2 + b^2 + 2cb \cos \varphi}}{cb} \end{aligned}$$

С ростом φ левая часть уравнения возрастает, а правая убывает. Следовательно, уравнение имеет единственное решение, соответствующее описанному четырехугольнику.

А.Заславский

M1888. В шкатулке n монет достоинством в целое число дукатов каждая на сумму $2n - 1$ дукатов. Докажите, что любую сумму от 1 до $2n - 1$ можно предоставить монетами из шкатулки.

Пусть окружность длины $2n - 1$ разделена n красными точками на n дуг так, что длина любой из них равна численному достоинству соответствующей монеты из шкатулки.

Достаточно доказать, что для всякого целого l такого, что $1 \leq l < 2n - 1$, найдется дуга окружности с красными концами, длина которой равна l . Это мы и докажем, для чего довольно будет ограничиться значениями l в пределах $1 \leq l \leq n - 1$.

Помимо красных точек, отметим на окружности еще

$n - 1$ черных точек так, что все вместе они делят окружность на $2n - 1$ равных дуг.

Предположим на минуту, что на окружности не существует дуги с красными концами некоторой целой длины l , где $1 \leq l \leq n - 1$. Но тогда оба конца любой дуги длины $2l$, середина которой является красной точкой, являются черными точками. Таких дуг всего n штук, не менее n черных точек должны являться концами этих дуг, но на самом деле на окружности всего $n - 1$ черных точек. Противоречие получено.

В.Произволов

M1889. На плоскости даны точки A_1, A_2, \dots, A_n и точки B_1, B_2, \dots, B_n . Докажите, что точки B_i можно перенумеровать так, что для всех $i \neq j$ угол между векторами $\overline{A_i A_j}$ и $\overline{B_i B_j}$ будет острым или прямым.

Выберем на плоскости начало координат O и рассмотрим сумму

$$S = \sum_{k=1}^n \overline{OA_k} \cdot \overline{OB_k}.$$

Выберем такую нумерацию точек B_i , что соответствующая сумма S максимальна. Рассмотрим теперь нумерацию точек B , в которой B_i и B_j обозначены B_j и B_i , и ее сумму S' . По предположению максимальной, $S \geq S'$, т.е.

$$S - S' = \overline{OA_i} \cdot \overline{OB_j} + \overline{OA_j} \cdot \overline{OB_i} - \overline{OA_i} \cdot \overline{OB_i} - \overline{OA_j} \cdot \overline{OB_j} \geq 0.$$

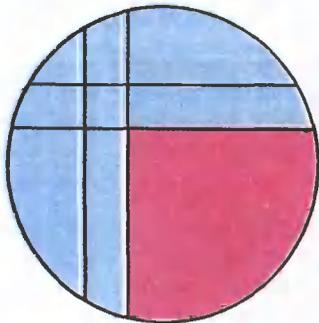
Преобразуя, получим

$$(\overline{OA_i} - \overline{OA_j}) \cdot (\overline{OB_i} - \overline{OB_j}) = \overline{A_j A_i} \cdot \overline{B_j B_i} \geq 0. \quad (*)$$

Итак, в нумерации с максимальным S неравенство $(*)$ выполняется для любых i и j . А это равносильно условию задачи.

Р.Карасев

M1890. Четыре хорды разделяют круг на девять частей, одна из которых является прямоугольником (см. рисунок). Площади восьми синих частей – рациональные числа. Докажите, что площадь красного криволинейного треугольника – рациональное число.



Месторасположение четырех хорд относительно центра круга O может быть различным, однако способ решения задачи от этого в принципе не зависит. Поэтому мы можем

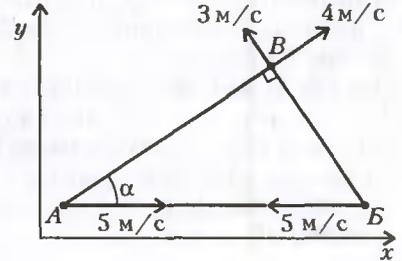
ограничиться рассмотрением, например, того случая, когда центр оказался внутри красного криволинейного треугольника. Случаи других расположений разбираются по той же схеме с точностью до незначительных композиционных и арифметических вариаций.

Отразим симметрично относительно центра O четыре данные хорды – получим еще четыре новые хорды, которые вместе со старыми разделяют круг на 25 кусков. Теперь мы предоставляем читателю самостоятельно провести кропотливую, но нетрудную работу:

убедиться, что площадь каждого из 25 кусков выражается арифметически посредством чисел, заданных условием задачи. Откуда непосредственно следует, что площадь красного криволинейного треугольника (состоящего из 9 красных кусков) является рациональным числом.

В.Произволов

Ф1898. Два футболиста бегут навстречу друг другу по одной прямой, скорости их все время одинаковы и равны 5 м/с. Судья в любой момент времени благоразумно держится поодаль (опыт есть) – на расстоянии ровно 30 м от футболиста в красной форме и на расстоянии 40 м от футболиста в синей форме. Найдите ускорение судьи в тот момент, когда расстояние между футболистами составляет 50 м.



Числа в условии задачи подобраны специально – треугольник со сторонами 30 м, 40 м и 50 м получился прямоугольным (см. рисунок). Проекция скорости судьи (B) на направление AB составляет

$$v \cos \alpha = 5 \text{ м/с} \cdot 0,8 = 4 \text{ м/с},$$

а на направление BB –

$$v \sin \alpha = 5 \text{ м/с} \cdot 0,6 = 3 \text{ м/с}.$$

Легко найти и проекции скорости судьи на оси x и y :

$$v_x = v \cos \alpha - v \sin^2 \alpha = 5 \text{ м/с} \cdot (0,64 - 0,36) = 1,4 \text{ м/с},$$

$$v_y = v \cos \alpha \sin \alpha + v \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot 5 \text{ м/с} \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 4,8 \text{ м/с}.$$

В системе отсчета, которая связана с футболистом A , судья движется по окружности радиусом 40 м. Его центростремительное ускорение составляет

$$a_{ц1} = \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{(5 - 1,4)^2 \text{ м}^2/\text{с}^2 + 4,8^2 \text{ м}^2/\text{с}^2}{40 \text{ м}} = 0,9 \text{ м/с}^2.$$

Вторую проекцию вектора ускорения – на направление BB – можно найти аналогично, «пересев» в систему отсчета, связанную с футболистом B :

$$a_{ц2} = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{(5 + 1,4)^2 \text{ м}^2/\text{с}^2 + 4,8^2 \text{ м}^2/\text{с}^2}{30 \text{ м}} = \frac{32}{15} \text{ м/с}^2.$$

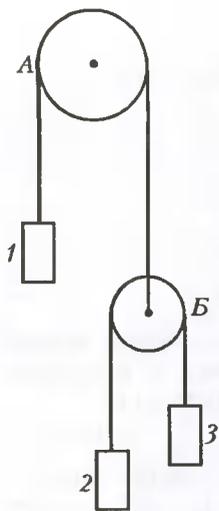
Теперь легко найти полное ускорение судьи:

$$a = \sqrt{a_{ц1}^2 + a_{ц2}^2} \approx 2,3 \text{ м/с}^2.$$

При вычислении ускорений мы использовали тот факт, что футболисты бегут равномерно, без линейных ускорений.

З.Рафаилов

Ф1899. Через блок A переброшена легкая нерастяжимая нить, к одному концу которой прикреплен груз, к



другому – ось блока Б, через который тоже переброшена нить. К концам этой нити прикреплены еще два груза. Один из трех грузов имеет массу M , два других – по $2M$. Блок А двигают по вертикали с некоторым ускорением. При какой величине этого ускорения два груза из трех могут оставаться неподвижными некоторое время (пока не кончатся нити)? Может быть, вы найдете несколько вариантов решения? Грузы движутся вертикально.

Обозначим грузы цифрами 1, 2 и 3 (см. рисунок). Один вариант решения виден сразу: при одина-

ковых грузах 2 и 3 они оба могут оставаться неподвижными, если $T_2 = T_3 = 2Mg$. В этом случае $T_1 = T_2 + T_3 = 4Mg$, и ускорение груза 1 составляет

$$a_1 = \frac{T_1 - Mg}{M} = 3g.$$

При этом блок А будет двигаться вверх с ускорением

$$a = \frac{1}{2}a_1 = \frac{3}{2}g$$

(напомним, что грузы 2 и 3, а значит, и блок Б неподвижны).

Второй вариант возможен, например, в случае $M_1 = 2M$, $M_2 = 2M$, $M_3 = M$. Теперь неподвижными могут оказаться либо грузы 1 и 2, либо грузы 1 и 3. Сделаем расчет. Для первого из этих случаев $T_1 = T_2 = 2Mg$, но так не получается – ведь $T_2 = T_3$ и $T_1 = 2T_2 \neq T_2$. Для второго случая $T_1 = 2Mg$, $T_3 = Mg$, тогда $T_2 = Mg$ и тут все хорошо: ускорение груза 2 направлено вниз и составляет

$$a_2 = \frac{2Mg - T_2}{2M} = \frac{1}{2}g.$$

При этом блок Б движется вниз с ускорением $\frac{1}{4}g$, ускорение блока А должно быть тоже направлено вниз и составлять

$$a = \frac{1}{8}g.$$

Итак, возможны два различных варианта.

А.Простов

Ф1900. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, с высоты H скатывается однородный сплошной диск. Какое максимальное количество теплоты при этом может выделиться? Точки диска все время находятся в одной вертикальной плоскости.

С одной стороны, тепло выделяется только при движении диска с проскальзыванием – если коэффициент трения достаточно велик, то тепло просто не будет выделяться. С другой стороны, при очень малом коэффициенте трения тепло тоже почти не выделяется. Тогда понятно, что максимальное количество теплоты

выделится при некотором промежуточном значении коэффициента трения.

Для упрощения примем такие обозначения. Пусть масса диска равна M , а его радиус равен R . Тогда (см. рисунок)

$$F = Mg \sin \alpha,$$

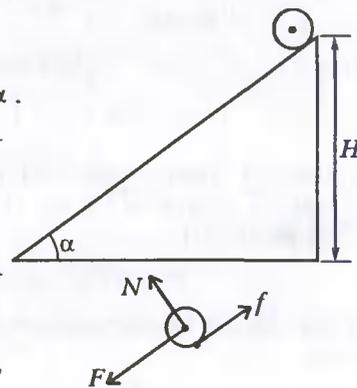
$$f = f_{\text{тр}} = \mu N = \mu Mg \cos \alpha.$$

При этом ускорение центра диска равно

$$a = \frac{F - f}{M},$$

а угловое ускорение составляет

$$\varepsilon = \frac{fR}{I} = \frac{fR}{MR^2/2} = \frac{2f}{MR},$$



где $I = MR^2/2$ – момент инерции диска.

Запишем выражение для полной механической энергии диска внизу:

$$\begin{aligned} W &= \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{Ma^2\tau^2}{2} + \frac{I\varepsilon^2\tau^2}{2} = \\ &= \frac{a\tau^2}{2} \left(Ma + \frac{I\varepsilon^2}{a} \right) = L \left(F - f + \frac{2f^2}{F - f} \right) = \\ &= LF \left(1 - \frac{f}{F} + \frac{2f^2}{F(F - f)} \right) = MgH \left(1 - x + \frac{2x^2}{1 - x} \right). \end{aligned}$$

Посмотрим на полученное выражение. Множитель в скобках обращается в единицу при $x_1 = \frac{f}{F} = 0$ и $x_2 = \frac{1}{3}$, что соответствует нулевому значению μ (это x_1) и «критическому» значению μ , при котором проскальзывание прекращается. В промежутке множитель в скобках меньше единицы – это означает, что часть начальной энергии диска, равной MgH , перешла в тепло. Нас интересует минимум выражения в скобках – он соответствует максимальному количеству выделившегося тепла.

Найти минимум можно несколькими способами (например – приравняв нулю производную по x). Легко видеть, что он достигается при

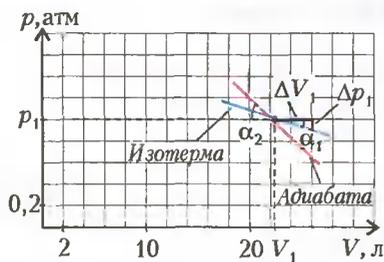
$$x = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,184.$$

В этом случае множитель в скобках составляет примерно $0,899 \approx 0,9$. Это означает, что в тепло перейдет примерно десятая часть начальной потенциальной энергии диска. Точный ответ несколько более громоздкий...

А.Круглов

Ф1901. На pV -диаграмме изображены процессы изотермического и адиабатического расширения одного моля гелия. Кривые пересекаются в точке с координатами 1 атм и 22,4 л. Один сантиметр по оси давлений соответствует 0,1 атм, 1 см по оси объемов – 1 л. Найдите угол, который составляют между собой кривые в точке пересечения графиков.

Для определения угла α между двумя кривыми (между малыми участками кривых около точки пересечения



графиков, которые можно считать прямолинейными) найдем углы, составляемые ими с горизонталью (см. рисунок; 1 «клетка» здесь соответствует 2 см!). Для нахождения угла (по значению

тангенса) нужно подставлять p и V в «клетках»: 1 атм = 5 клеток, 22,4 л = 11,2 клетки. Для изотермы

$$p_1 V_1 = (p_1 - \Delta p_1)(V_1 + \Delta V_1).$$

Пренебрегая произведением малых Δp_1 и ΔV_1 , получим

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta V_1} = \frac{p_1}{V_1} = \frac{5}{11,2}, \quad \alpha_1 \approx 24^\circ.$$

Для малого ΔV_2 без отвода тепла (для адиабаты)

$$(p_1 - \Delta p_2)(V_1 + \Delta V_2) = R(T_1 + \Delta T_2)$$

и

$$p_1 \Delta V_2 + \frac{3}{2} R \Delta T_2 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{5}{3} p_1 \Delta V_2 = V_1 \Delta p_2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\Delta p_2}{\Delta V_2} = \frac{5}{3} \frac{p_1}{V_1} = \frac{5}{3} \frac{5}{11,2}, \quad \alpha_2 \approx 56^\circ.$$

Окончательно,

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \approx 32^\circ.$$

Р.Александров

Ф1902. В откачанном до глубокого вакуума помещении на столе стоит вертикальный цилиндрический сосуд. В сосуде под массивным поршнем находится порция азота. Поршень может двигаться по вертикали без трения. Когда в сосуде установилось равновесие, поршень толкнули вниз, придав ему мгновенную скорость v_0 . После длительных колебаний в сосуде вновь установилось равновесие. На какое расстояние сместился поршень по отношению к начальному положению? Поршень и сосуд имеют пренебрежимо малые теплоемкости, сосуд теплоизолирован.

Обозначим начальную высоту поршня над дном сосуда через H , конечную высоту — через h . Пусть температура газа в начальном состоянии равновесия T_1 , в конечном T_2 . Тогда можно записать

$$\frac{Mg}{S} SH = \nu RT_1, \quad \frac{Mg}{S} Sh = \nu RT_2$$

где M — масса поршня, S — площадь сечения сосуда, ν — количество молей азота. Изменение внутренней энергии газа (азот — двухатомный газ) определяется работой внешних для него сил и равно изменению полной энергии поршня:

$$\frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{Mv_0^2}{2} + Mgh - Mgh.$$

После очевидных преобразований получим

$$\frac{5}{2} Mg(h - H) = \frac{Mv_0^2}{2} + Mg(H - h),$$

или

$$\frac{7}{2} g(h - H) = \frac{v_0^2}{2},$$

откуда

$$h - H = \frac{v_0^2}{7g}.$$

Таким образом, при затухании колебаний поршня часть его кинетической энергии идет на нагревание газа, а часть — на подъем поршня от H до h .

З.Повторов

Ф1903. Тонкий непроводящий стержень длиной L заряжен равномерно по всей длине. Его издали подносят к закрепленному точечному заряду так, что расстояние от заряда до ближнего конца стержня составляет L . При этом совершается работа A . Какую работу нужно дополнительно совершить, передвигая стержень поближе, чтобы расстояние от ближнего конца стержня до заряда уменьшилось в 3 раза? Стержень после каждого перемещения ориентирован вдоль прямой, проходящей через точку закрепления заряда.

В этой задаче все можно посчитать «в лоб», но это неинтересно. Попробуем решить ее красиво — без вычислений. Для этого нарисуем график потенциала точечного заряда как функцию координаты (см. рисунок):

$$\varphi = k \frac{Q}{x}.$$

Отложим по оси x две точки — координаты концов заряженного отрезка L и $2L$. Легко видеть, что площадь под графиком (от L до $2L$) пропорциональна работе по переносу заряженного стержня из бесконечности в это положение (если умножить эту площадь на q , т.е. на заряд единицы длины стержня, то эта величина будет не пропорциональна, а просто равна работе). Можно показать, что при любом x_1 площадь от x_1 до $2x_1$ такая же, как от L до $2L$. (Разобьем графики на одинаковое число узких «столбиков» — во сколько раз больше ширина у любого столбика одной из площадей, во столько же раз меньше высота у соответствующего ему столбика на другой из площадей.) Передвинем стержень — теперь он занимает

положение от $\frac{L}{3}$ до $\frac{4L}{3}$. Разделим эту площадь на две:

от $\frac{L}{3}$ до $\frac{2L}{3}$ и от $\frac{2L}{3}$ до $\frac{4L}{3}$. Видно, что площади эти такие же, как под $L - 2L$. Значит, для переноса придется совершить работу, равную разности между $2A$ и A , т.е. еще такую же работу A .

А.Сложнов

Ф1904. Батарейки с напряжениями 3 В и 6 В соединены последовательно. К их выводам подключили два одинаковых вольтметра, также соединенных последовательно. После подключения резистора между точкой соединения батарей и точкой соединения вольтметров (рис. 1) показание одного из вольтметров увеличилось до 5 В. Что будет показывать этот вольтметр, если второй вольтметр отключить?

До подключения резистора сопротивлением R вольтметры показывали по 4,5 В. Ясно, что после подключения резистора (см. рис. 1) увеличились до 5 В показания вольтметра справа – подключенного к батарейке с напряжением 6 В, а показания левого вольтметра при этом уменьшились до 4 В. Теперь напряжение между выводами резистора составляет ровно 1 В, а ток через него равен разности токов вольтметров:

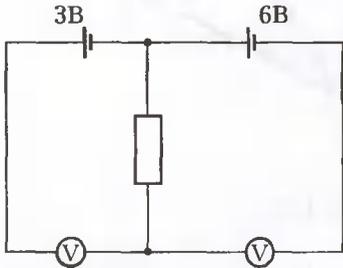


Рис. 1

Отсюда для сопротивления вольтметра находим

$$\frac{5\text{ В}}{R_V} - \frac{4\text{ В}}{R_V} = \frac{1\text{ В}}{R}.$$

Отсюда для сопротивления вольтметра находим

$$R_V = R.$$

После отключения второго (левого) вольтметра получится простая цепь (рис. 2). С учетом равенства $R_V = R$ находим показание первого вольтметра:

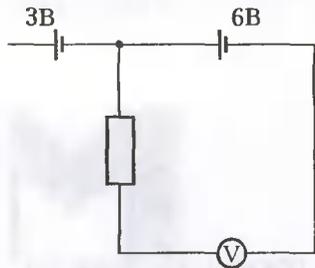


Рис. 2

$$U = \frac{6\text{ В}}{2} = 3\text{ В}.$$

М.Учителев

Ф1905. Двадцать одинаковых конденсаторов емкостью C каждый соединили последовательно и подключили к источнику напряжением U . Подождав немного, пока конденсаторы зарядятся, источник отключили, один из конденсаторов переключили «наоборот» – поменяли местами его выводы – и вместо источника к батарее конденсаторов подключили резистор сопротивлением R . Какой заряд протечет по резистору и сколько тепла в нем выделится?

После окончания процесса заряда от источника напряжение каждого из конденсаторов составит $\frac{1}{20}U$. После подключения резистора сопротивлением R по цепи протечет заряд q , напряжение каждого из 19 «правильных» конденсаторов уменьшится на $\frac{q}{C}$, а у «перевернутого» – увеличится на $\frac{q}{C}$. Ток через резистор (см. рисунок) прекратится при условии

$$19\left(\frac{1}{20}U - \frac{q}{C}\right) = \frac{1}{20}U + \frac{q}{C}.$$

Отсюда можно найти протекший заряд:

$$q = \frac{9}{200}CU.$$

Выделившееся количество теплоты можно посчитать из энергетического баланса: до подключения резистора суммарная энергия конденсаторов была

$$W_{\text{нач}} = 20 \frac{C\left(\frac{1}{20}U\right)^2}{2} = \frac{1}{20} \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{40}CU^2.$$

После перетекания заряда q энергия стала

$$W_{\text{кон}} = 19 \frac{C\left(\frac{1}{20}U - \frac{q}{C}\right)^2}{2} + \frac{C\left(\frac{1}{20}U + \frac{q}{C}\right)^2}{2} = \frac{19}{4000}CU^2.$$

Тогда количество теплоты, выделившееся на резисторе, будет равно

$$Q = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}} = \frac{81}{4000}CU^2.$$

Интересно, что ответ не зависит от величины R ! Значит ли это, что при $R = 0$ тепло все равно выделится в том же количестве? Нет! Если $R = 0$, то в цепи вовсе не установится равновесие – там возникнут колебания (при уменьшении R возрастают токи, приходится учитывать энергию магнитного поля – в общем, получится не совсем обычный колебательный контур, а контур с небольшой – всего в один виток – индуктивностью).

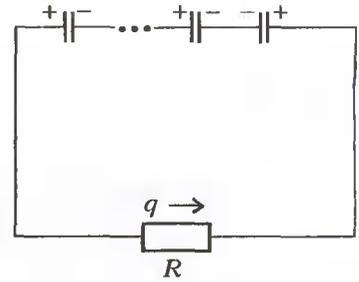
З.Повторов

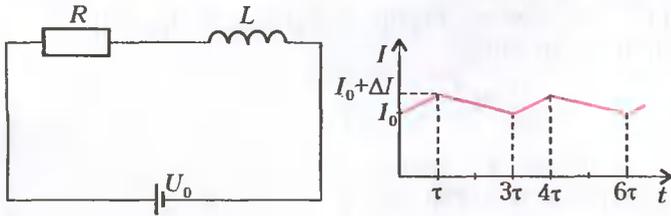
Ф1906. К батарейке подключен странный «резистор», сопротивление которого все время изменяется: в течение 0,01 с сопротивление составляет 100 Ом, следующие 0,02 с сопротивление равно 200 Ом, и так периодически повторяется. Конечно, при этом изменяется и сила тока в цепи. Для уменьшения изменения тока последовательно с «резистором» включают катушку индуктивности. При какой индуктивности катушки относительное изменение тока в цепи не будет превышать 1%? Элементы цепи считать идеальными.

При изменении тока через катушку она «добавляет» к напряжению (ЭДС) батарейки свою ЭДС индукции – именно за ее счет ток почти не изменяется при сильном изменении сопротивления цепи. ЭДС индукции в одном случае (при сопротивлении «резистора» $2R = 200$ Ом) добавляется к напряжению батарейки, а в другом (при сопротивлении R) – вычитается. Поэтому можно записать (см. рисунок)

$$I_0 = \frac{U_0 + |\mathcal{E}_1|}{2R} = \frac{U_0 - |\mathcal{E}_2|}{R},$$

$$\mathcal{E}_1 = -L \frac{\Delta I}{2\tau}, \quad \mathcal{E}_2 = -L \frac{\Delta I}{\tau},$$





откуда $\frac{U_0 + L \frac{\Delta I}{2\tau}}{2} = U_0 - L \frac{\Delta I}{\tau}$, или $L \frac{\Delta I}{\tau} = \frac{2}{5} U_0$.

Тогда $I_0 = \frac{U_0 - \frac{2}{5} U_0}{R} = \frac{3 U_0}{5 R}$, $\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{\frac{2}{5} U_0 \tau}{L \cdot \frac{3 U_0}{5 R}} = \frac{2 R \tau}{3 L} = 0,01$.

Отсюда $L = \frac{2 R \tau}{0,03} \approx 66 \text{ Гн}$.

З.Рафаилов

Ф1907. Маленький источник света движется с постоянной скоростью v вдоль прямой, составляющей угол 10° с главной оптической осью собирающей линзы. При этом изображение источника также движется вдоль прямой, которая составляет с главной оптической осью линзы угол 20° . Найдите минимальное значение скорости изображения относительно источника. Каково в этот момент увеличение линзы?

На рисунке 1 изображены лучи, которые позволяют построить изображение в линзе. На рисунке 2 показаны скорость изображения в линзе \dot{y} и скорость $-\dot{v}$ для нахождения относительной скорости. Скорость u может принимать любые значения, а минимальная относительная скорость получится при $\alpha = 90^\circ$ — она будет равна

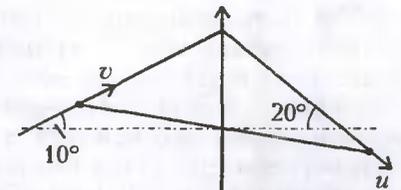


Рис.1

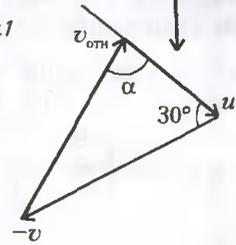


Рис.2

$v_{\text{отн min}} = 0,5v$.

При этом

$u = v \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Увеличение однозначно тут определить нельзя: поперечные размеры меняются не так, как продольные. Но если, например, источник представляет собой короткую стрелку вдоль вектора \vec{v} , то увеличение будет равно

$\Gamma = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$

(изображение перевернутое).

А.Зильберман

Вниманию наших читателей

В московском издательстве «Техносфера» в серии «Мир программирования» вышла книга Дж.Макконнелла «Анализ алгоритмов. Вводный курс» (М.: Техносфера, 2002. — 304 с. — Перевод с англ. С.К.Ландо). Эта книга — одно из самых современных пособий в мире по основам программирования.

Как показывает опыт, элементная база компьютеров, операционные системы, средства доступа и внешний вид программ по истечении, скажем, десятилетия меняются коренным образом. Однако структуры и алгоритмы, лежащие в их основе, остаются неизменными гораздо более длительное время. Эти основы начали закладываться тысячелетия назад, когда были разработаны первые алгоритмы. В предлагаемой книге обсуждаются алгоритмы решения наиболее широко распространенных классов задач, покрывающих практически всю область программирования: поиск и сортировка, численные алгоритмы и алгоритмы на графах. Особое внимание уделено алгоритмам параллельной обработки, редко освещаемым в литературе на русском языке.

Книга носит учебный характер. Она может быть использована как для организации семестрового курса, так и для самостоятельного изучения. Изложение неформальное и чрезвычайно подробное, с большим количеством упражнений, позволяющих вести само-

контроль. Русское издание этого учебника увидело свет вскоре после выхода книги на английском языке и уже успело завоевать широкое признание.

Аудитория книги — старшеклассники и студенты, заинтересованные в углубленном изучении основ программирования, а также школьные и вузовские преподаватели информатики.

Полное содержание книги можно найти на сайте:

www.technosphaera.ru.

Цена книги при заказе наложенным платежом — 184 рубля.

Наш телефон: (095) 234-0110.

Книги издательства «Техносфера» можно заказать:

- по почте: 125319 Москва, а/я 594;
- по факсу: (095) 956-3346;
- по e-mail: knigi@technosphaera.ru.



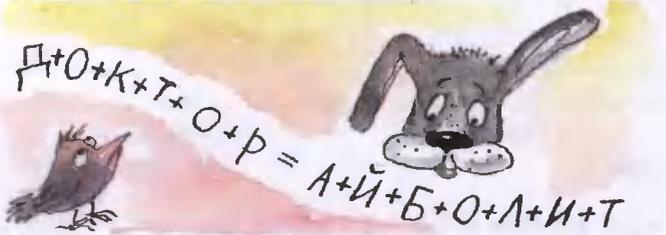
Задачи

1. Замените буквы цифрами так, чтобы выполнялись оба равенства (буквы И, Й надо заменить разными цифрами):

$$Д + О + К + Т + О + Р = А + Й + Б + О + Л + И + Т,$$

$$Д \cdot О \cdot К \cdot Т \cdot О \cdot Р = А \cdot Й \cdot Б \cdot О \cdot Л \cdot И \cdot Т.$$

А.Зайчик



2. Два спортсмена соревнуются в точности стрельбы (точностью стрельбы называется отношение числа успешных выстрелов к числу использованных патронов). Вначале каждому спортсмену выдается ровно 20 патронов. Соревнование проходит в два этапа, причем на каждом этапе спортсмен может использовать любую отличную от нуля часть патронов.



Может ли случиться так, что на каждом из двух этапов точность стрельбы первого спортсмена будет выше, чем точность стрельбы второго, но по общему результату соревнований точность стрельбы первого спортсмена окажется ниже точности стрельбы второго?

П.Самовол, М.Аппельбаум

3. Знатокам остроумных математических головоломок давно известны так называемые «самоописывающиеся» числа. Например, число 2100010006 интересно тем, что его первая цифра равна количеству единиц в этом числе, вторая – количеству двоек, ..., десятая – количеству нулей. А существует ли такое девятизначное число, у которого первая цифра равна количеству



НЕ единиц, вторая – количеству НЕ двоек, ..., девятая – количеству НЕ девяток?

И.Акулич

4. Круг накрывает половину периметра правильного шестиугольника. Может ли при этом шестиугольник накрывать половину периметра круга?

В.Произволов



5. В лесу водятся крикливые пушистые зверюшки, среди которых имеются барабашки. Какого бы зверя ни взять, существует барабашка точно такой же крикливости и существует барабашка точно такой же пушистости (возможно, это один и тот же барабашка). Среди всех зверюшек одинаковой крикливости барабашки самые пушистые. Среди барабашек более крикливые являются более пушистыми. Следует ли отсюда, что среди всех зверюшек одинаковой пушистости барабашки наименее крикливые?

А.Жуков



Иллюстрации Д.Гришуковой

Две игры

А.ГРАМШИ

Размножающиеся нолики

На бесконечном листе бумаги в клетку задается произвольная начальная конфигурация из конечного числа ноликов, например из четырех (рис.1). К этим ноликам последовательно добавляются новые, причем

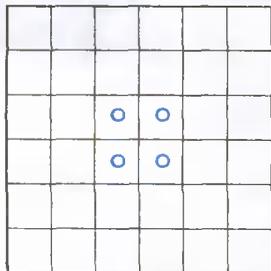


Рис. 1

1) каждый новый нолик должен образовывать с предыдущими хотя бы один ряд из трех рядом стоящих ноликов по вертикали, горизонтали или диагонали;

2) запрещается ставить нолик, если при этом он образует с предыдущими хотя бы один ряд более чем из трех рядом стоящих ноликов.

Так, в позиции, изображенной на рисунке 2, в ячейки 1, 2, 3, 4 можно последовательно ставить нолики. После этого в ячейку 5 нолик ставить нельзя, поскольку образуется ряд из четырех рядом сто-

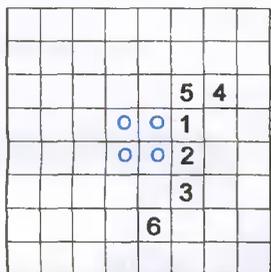
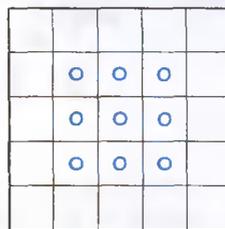
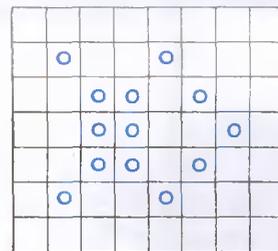


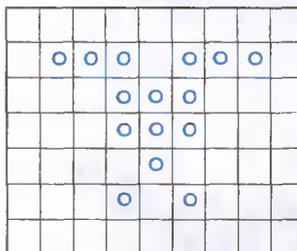
Рис. 2



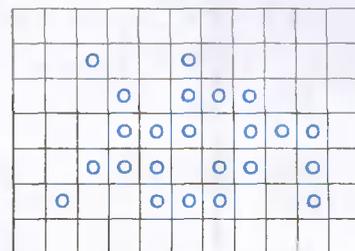
а) «квадрат»



б) «рыба»



в) «усачи»



г) «паровоз»

Рис. 3

ящих ноликов 5, 1, 2, 3. В ячейку 6 тоже нельзя ставить нолик, так как при этом образуется лишь пара ноликов, а именно 3 и 6.

Попробуйте поставить как можно больше новых ноликов!

На рисунке 3 изображены некоторые конечные конфигурации, т.е. такие, к которым нельзя добавить новых ноликов, не нарушая правил. Попробуйте восстановить для каждой из этих конфигураций одну из возможных последовательностей выставляемых ноликов. Конфигурация г) состоит из наибольшего числа ноликов – 23. Можно ли улучшить этот результат?

Примеры некоторых других начальных конфигураций представлены на рисунке 4. Продолжите расстановку нулей!

Интересно, что для любой начальной конфигурации из конечного числа ноликов число новых допустимых ноликов всегда конечно. Попробуйте доказать это утверждение.

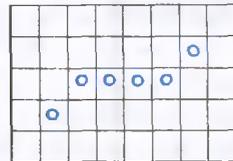
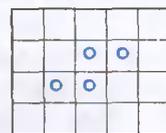
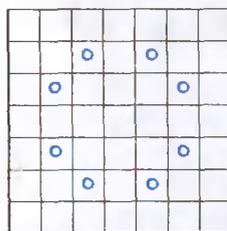


Рис. 4

Эту игру-головоломку можно легко преобразовать в игру двух (трех, четырех, ...) лиц. Игроки ставят поочередно по одному (в других разновидностях игры – по два, три, ...) нолику, соблюдая вышеописанные правила. Проигрывает тот, кто не сможет выставить очередным ходом свой нолик.

Ним с одновременным ходом

Эта простейшая развлекательная игра доступна даже самым младшим. Играют двое. Имеется исходное



универсальное конечное множество U некоторых объектов (например, n чисел от 1 до n). Первый ход состоит в том, что каждый игрок выбирает для себя некоторое подмножество объектов.

Если подмножества противников не пересеклись, то игроки забирают выбранные объекты (взятые объекты впоследствии не возвращаются в U). Если подмножества игроков пересеклись, то сравниваются их мощности (количества предметов). Если у игрока A мощность меньше, он забирает выбранные объекты из универсального множества, при этом игрок B не получает ничего.

В других разновидностях игры соответственно: 1) игрок B забирает лишь те объекты, которые не были выбраны игроком A (смягченный вариант); 2) игрок A забирает как свои, так и чужие объекты (жесткий вариант).

Если подмножества пересеклись, но они равномогутны, то противники забирают намеченные объекты, кроме общих объектов; последние удаляются из игры. Если подмножества совпадают, то все намеченные для взятия объекты обоих противников удаляются из игры.

В результате после первого хода множество U превращается в множество U' меньшей мощности.

Второй ход делается аналогично, но в качестве универсального множества рассматривается множество U'' , и т.д.

Цель игры — набрать как можно больше объектов из универсального множества.

Приведем вариант партии. Допустим, универсальное множество U состоит из 10 чисел от 1 до 10. Первым ходом игрок A выбирает подмножество $A_1 = \{2, 7\}$,

игрок B выбирает подмножество $B_1 = \{1, 3, 9\}$. Поскольку в A_1 и B_1 нет совпадающих элементов, то игроки забирают выбранные числа. В результате получаем новое универсальное множество $U' = \{4, 5, 6, 8, 10\}$. Вторым ходом A выбирает $A_2 = \{4, 5\}$, B выбирает $B_2 = \{5\}$. Поскольку A_2 и B_2 пересеклись и количество элементов в B_2 меньше, чем в A_2 , то B забирает 5, A не забирает ничего. Получаем новое универсальное множество $U'' = \{4, 6, 8, 10\}$. Третьим ходом A выбирает $A_3 = \{4, 6\}$, B выбирает $B_3 = \{6, 8\}$. Поскольку у A_3 и B_3 есть общий элемент 6, а количества элементов одинаковы, то A забирает 4, B забирает 8, а число 6 удаляется из игры. В результате получаем одноэлементное универсальное множество $U''' = \{10\}$. Партия закончена.

Понятно, что минимальная мощность универсального множества, при котором имеет смысл продолжать партию, равна 3.

Итак, игрок A собрал числа 2, 4, 7; B собрал 1, 3, 5, 8, 9. Так как B собрал на два числа больше чем A , то B считается выигравшим. Если ввести в игру понятие платежа, то тогда A должен отдать B две денежные единицы.

Попробуйте найти оптимальные стратегии игроков в этой игре.

Александр Доброчаев предложил разновидность этой игры, в которой различные элементы имеют различную ценность, или вес. Например, число 2 вдвое тяжелее, чем 1, число 3 — втрое тяжелее и так далее до 10. Правила игры те же, но условие выигрыша иное: выигрывает тот, у кого сумма выбранных чисел больше. Попробуйте и для этой игры найти оптимальные стратегии игроков.

Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

С 25 июня по 1 июля 2003 года в пансионате «Берендеевы поляны» (г. Судиславль Костромской области) проходил очередной заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» журнала «Квант». В турнире математических боев участвовали команды из Бишкека, Винницы, Донецка, Киева, Костромы, Магнитогорска, Москвы, Омска, Перми, Снежинска, Харькова, Чебоксар и Черногловки.

Поскольку турнир был очень многочисленным, команды 6–8 классов были разбиты (по результатам проведенной в первый день соревнований командной олимпиады) на три лиги. По итогам математических боев первое место заняла команда Москвы (руководитель А.В.Спивак), второе место разделили команды





Донецка (Л.Л.Потемкина) и Харькова (А.Л.Берштейн), третье – Снежинска (А.А.Малеев) и Черноголовки (Е.П.Трепалина), похвальные грамоты получили команды московского лицея «Вторая школа» (Е.Ю.Иванова, Г.В.Кондаков) и московской гимназии 1543 (Т.Ю.Сысоева, А.В.Хачатурян).

В прошлый раз (по инициативе Е.Ю.Ивановой и Д.А.Калинина) в рамках турнира впервые состоялись матчи учащихся 9 классов. Инициатива прижилась: теперь команды

девятиклассников пришлось даже разбить на две лиги. Девятиклассники состязались практически по тем же задачам, что и ученики 6–8 классов. По итогам соревнований первое место заняла одна из команд Москвы (Г.В.Кондаков, М.В.Мазин), второе разделили команды Москвы (Г.В.Кондаков, М.В.Мазин) и Черноголовки (Е.П.Трепалина), третье – команды Донецка (Л.Л.Потемкина) и Перми (Г.А.Одинцова), похвальные грамоты получили команды Костромы (Д.А.Калинин) и Магнитогорска (Н.С.Никифорова, А.В.Устинов).

Предлагаем вам познакомиться с некоторыми задачами турнира (указания, решения и ответы будут опубликованы в одном из следующих номеров журнала).

Задачи турнира

1. Дон Кихот одержал победу над 10 ветряными мельницами. Некоторым он отрубил по два крыла, некоторым три, а остальным – все четыре. Первые три мельницы в сумме потеряли в полтора раза меньше крыльев, чем остальные семь. Мельниц, ставших однокрылыми, больше, чем мельниц, ставших двукрылыми. Сколько мельниц лишились всех четырех крыльев?

И. Акулич

2. В круговом турнире участвуют 10 команд. Для победы в турнире нужно набрать строго больше очков, чем все остальные команды. Через какое минимальное количество туров может выявиться победитель?

М.Мазин

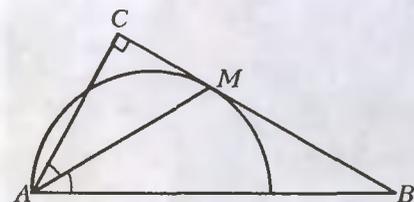


Рис. 1

3. Полуокруг касается катета BC прямоугольного треугольника ABC

в точке M (рис.1). Докажите, что отрезок AM – биссектриса угла BAC .

В.Произволов

4*. Для любого натурального n существует клетчатая фигура, которую можно разрезать на двухклеточные доминошки ровно n способами. Докажите это.

А.Шаповалов

5. На шахматной доске расставлено несколько черных и несколько белых ладей так, что каждая ладья (как белая, так и черная) бьет больше белых ладей, чем черных. Может ли черных ладей быть больше, чем белых?

И.Акулич

6. Тринадцать шахматистов в течение трех дней должны сыграть друг с другом по одной партии. Составьте турнирное расписание так, чтобы в каждый из дней для любых двух шахматистов A и B , не играющих в этот день между собой, существовал шахматист C , играющий в этот день и с A , и с B .

С.Токарев

7. Нарисуйте на плоскости несколько точек, более половины из них покрасьте и соедините некоторые из них непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило не менее 3 отрезков, но никакие две окрашенные точки не были соединены отрезком.

А.Сливак

8. Восьмого марта каждая из n учительниц пришла в школу с букетом из одного цветка. Оказалось, что все цветы разные. Каждая учительница может подарить любой другой учительнице все или часть оказавшихся у нее к моменту дарения цветов. Нельзя дарить букет, если в точности такой же букет в этот день уже кому-то дарили. Какое наибольшее количество букетов могло быть подарено?

А.Чеботарев

9. В одну строку выписаны 40 знаков: 20 крестиков и 20 ноликов. За один ход можно поменять местами любые два соседних знака. За какое наименьшее число ходов можно гарантированно добиться того, чтобы некоторые 20 стоящих подряд знаков оказались крестиками?

И.Акулич

10. Шахматный король, которому запрещено ходить по диагонали, сделал несколько ходов (посетив, возможно, некоторые поля не-



однократно). При этом он побывал на всех белых полях. Каково наименьшее возможное число черных полей, на которых он побывал?

И.Акулич

11. Какое наибольшее количество натуральных чисел, ни одно из которых не представимо в виде $a \cdot b^2$,

где числа a и b — взаимно просты, причем $b > 1$, может идти подряд?

А.Шаповалов

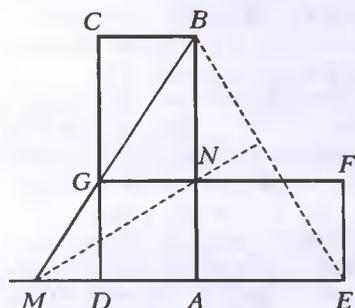


Рис. 2

Рис. 2
 прямую AD в точке M . Докажите перпендикулярность прямых MN и BE .

Д.Калинин

13. Могут ли три разных числа вида $2^n + 1$, где n а) целое; б) натуральное, быть последовательными членами геометрической прогрессии?

В.Сендеров

14. В ряд лежат 100 штабелей бетонных плит: в крайнем справа — 1 плита, во втором — две, ... , в 100-м штабеле — 100 плит. Строителю дано задание перераспределить плиты по штабелям, двигая их направо. Сил поднимать плиту у него нет, поэтому он может передвинуть плиту в соседний справа штабель, только если там плит меньше. Как могут быть распределены плиты в штабелях после того, как строитель сделает все, что может?

Д.Калинин, А.Чернышев

15. Существуют ли такие целые попарно взаимно простые числа x, y, z, t , не равные нулю, что

$$(x + y + z)(x + y + t)(x + z + t)(y + z + t) = xyzt?$$

В.Сендеров

16. В куче лежат n камней. Двое по очереди берут камни из кучи. За один ход можно взять один или два камня. Чтобы выиграть, игроку нужно взять последний камень и, кроме того, набрать в сумме не меньше камней, чем соперник. При каких n один из игроков может обеспечить себе победу при любой игре соперника?

Е.Барабанов, И.Воронович

17. У Пети по русскому языку в журнале стоят только двойки и тройки. Добрая фея просматривает оценки слева направо и, если находит тройку и двойку (или двойку и тройку), идущие подряд, тут же превращает их в пятерку. Докажите, что если бы фея просматривала оценки справа налево, то пятерок у Пети получилось бы столько же.

А.Чеботарёв



18. На складе лежат 27 деталей, каждая промаркирована первым или вторым сортом. Детали одинакового сорта весят одинаково, и каждая деталь второго сорта немного легче детали первого сорта. Известно, что ровно одна из деталей промаркирована неправильно. Покажите, что ее можно наверняка выявить за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь.

А.Шаповалов

19. Можно ли число 110 представить в виде суммы натуральных слагаемых, сумма обратных величин которых равна 1?

А.Шаповалов

20. Во всех клетках шахматной доски, кроме восьми клеток диагонали $a1-h8$, расставлено по одной шашке. Петя и Коля играют, делая ходы по очереди. Петя каждым своим ходом снимает с доски не более 14 любых шашек, а Коля выбирает любую клетку диагонали $a1-h8$ и ставит шашки во все пустые клетки, находящиеся с ней на одной вертикали или горизонтали (но на диагональ шашку не ставит). Может ли Петя добиться того, чтобы после его очередного хода на доске осталось не более трех шашек?

И.Акулич

21. Шагреневая кожа исполняет желания, но после каждого желания ее площадь уменьшается: либо на 1 квадратный дециметр — в обычном случае, либо в два раза — если желание заветное. Десять желаний уменьшили площадь кожи втрое, следующие несколько — еще всемеро, а еще через несколько желаний кожа вообще пропала. Какова была первоначальная площадь кожи?

И.Акулич

22. В кучке лежат 2003 ореха. Можно разбивать любую кучку на две части, но если разбиваешь на две неравные части, нужно заплатить рубль. Какую наименьшую сумму придется потратить, чтобы получить 2003 кучки по одному ореху?

А.Шаповалов

(Окончание см. на с. 44)

Два торнадо и несколько ворон

В. ВЫШИНСКИЙ

Я ШЕЛ ПО ОПУШКЕ ОСЕННЕГО ЛЕСА, ПРИСЛУШИВАЯСЬ к крику кукушки. Низко пролетел самолет – кукушка на мгновение замолкла, но, к моей радости, тут же продолжила счет оставшихся лет. Вдруг без видимой причины зашуршали листья, и некоторые из них взметнулись вверх. Линия возмущения хлыстом пробежала по поляне, нарушая тихий покой листьев, и запуталась в ветвях деревьев. Так я впервые «увидел» вихревой след от самолета – два «горизонтальных торнадо», как окрестили американцы это грозное явление. Статистика знает множество летных происшествий и авиакатастроф, связанных с попаданием в вихревой след. Но о грустном – в другой раз.

Что же произошло в лесу? Давайте построим физическую модель явления. При полете самолета в атмосфере, как следствие создания подъемной силы, возникает вихревой след (рис.1,а). В первом приближении крыло самолета

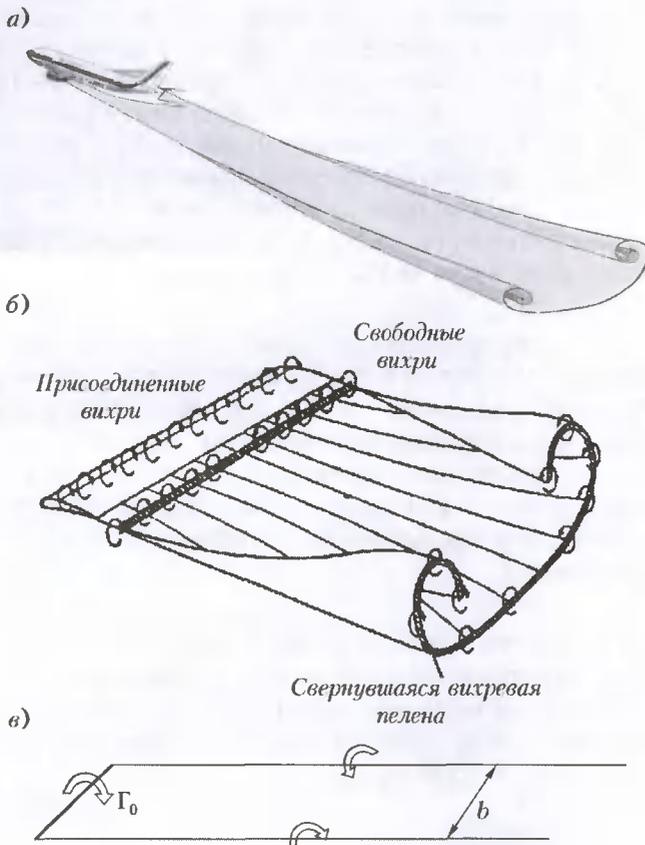


Рис. 1. Вихревой след самолета и его простейшая модель

можно заменить так называемым присоединенным вихрем (рис.1,б). Так в свое время предложил делать Л.Прандтль, один из основателей аэродинамики. Вихри имеют свойство не оканчиваться просто так – они либо уходят в бесконечность, либо замыкаются друг на друга, образуя вихревые кольца, либо опираются на твердую поверхность, как это делает смерч (торнадо). От присоединенного вихря вниз по потоку отходит пара вихревых жгутов – свободных вихрей. Получается П-образный вихрь (рис.1,в), который является первым приближением вихревой системы самолета.

Свободные вихри имеют противоположную скорость вращения и настолько свободны, что опускаются в атмосфере под действием «взаимной индукции» – скорости, создаваемой своим партнером. Вблизи земли вихри уже так «надоедают» друг другу, что разбегаются в разные стороны. Это связано с условием непротекания, которое проще всего моделируется парой зеркально отраженных «подземных» вихрей противоположного знака (рис.2). Замерив время опускания вихрей и зная тип самолета, можно оценить высоту его полета.

Об этом случае я вспомнил в аэропорту города Франкфурта-на-Майне. Там в пространстве под глиссадой – невидимой

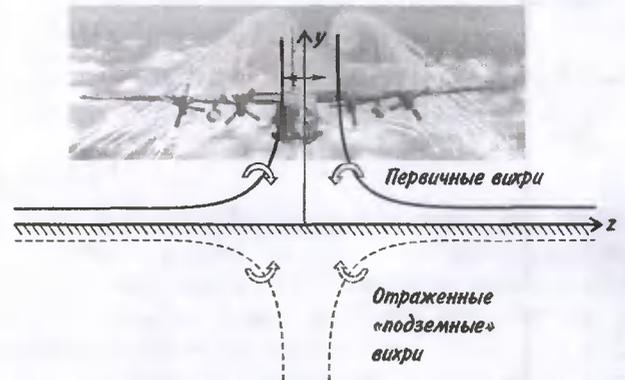


Рис. 2. Разбегание вихрей у земли

линией, по которой воздушные суда заходят на посадку, – между двумя параллельными взлетно-посадочными полосами (ВПП) расположены вышки со специальными измерительными приборами – ультразвуковыми анемометрами (рис.3). Эта система называется ветровой линией и служит для определения ветровой обстановки в зоне ВПП. На вышках восседали вороны, лениво перекаркиваясь между собой и не обращая внимания на садящиеся самолеты.

Я стал с интересом наблюдать, что же будет дальше. Вскоре довольно тихо зашел на посадку самолет фирмы «Боинг» (В-747). Он пронесся в воздухе, коснулся ВПП, деловито пробежал почти до полной остановки и свернул на

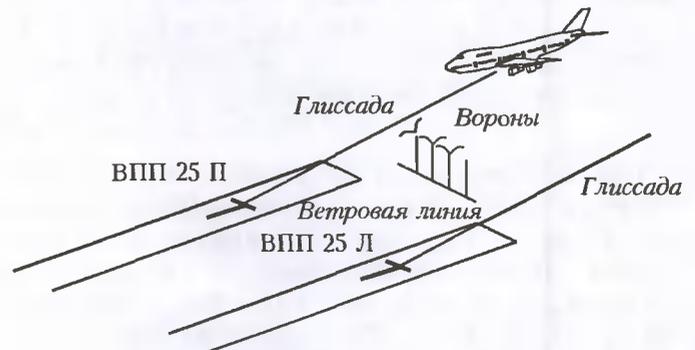


Рис. 3. Схема захода самолета на посадку

рулежную дорожку. В этот момент с ближайшей к ВПП мачты ветровой линии свалилась ворона. Она, взмахнув крыльями, перевернулась в воздухе, и «кар» застрял у нее в глотке. То же самое повторилось через некоторое время (20–30 секунд) с вороной на соседней мачте. Третья ворона удержалась, но была сильно удивлена и испугана воздушным «шлепком».

Я решил подсчитать скорость разбегания вихрей. Расстояние между вышками около 50 метров, интервал между сваливанием ворон около полминуты; таким образом, скорость разбегания вихрей у земли оказалась порядка 2 м/с. Получился неплохой результат, так что по темпу «сваливания ворон» с вышек можно, в первом приближении, определить тип севшего самолета.

Действительно, пусть известен вес самолета $G = mg$ и размах его крыла l . По теореме Жуковского, погонная подъемная сила профиля крыла (в расчете на единицу длины крыла) пропорциональна так называемой циркуляции скорости Γ (см. Примечание 1), скорости полета u_∞ и плотности воздуха ρ : $\frac{F_y}{\Delta l} = \rho u_\infty \Gamma$. Тогда в предположении, что эта циркуляция распределена приблизительно постоянно по размаху крыла: $\Gamma(z) \approx \Gamma_0$, получим

$$F_y = G = \rho u_\infty \Gamma_0 b,$$

где $u_\infty \approx 70$ м/с при полете по глиссаде, а b – расстояние между присоединенными вихрями (см. Примечание 2). Скорость, индуцируемая соседним потенциальным вихрем в области данного вихря (см. Примечание 3), равна

$$v_i = \frac{\Gamma_0}{2\pi b},$$

так что скорость опускания вихревой пары составляет

$$v_y = \frac{G}{2\pi \rho u_\infty b^2}.$$

Разумно считать, что скорость разбегания вихрей v_z приблизительно равна скорости опускания v_y . Измерив v_z по

методу «сваливания ворон», можно найти отношение G/b^2 и по соответствующей таблице определить тип севшего самолета. Например, для самолета Ил-96 (размах крыла $l = 58$ м, максимальная взлетная масса $m = 270$ т) $b \approx 45,5$ м, $G/b^2 \approx 1300$ Н/м², а для самолета В-747 ($l = 64$ м, $m = 370$ т) $b \approx 50$ м, $G/b^2 \approx 1500$ Н/м². Более точные расчеты дают скорость опускания вихрей для последнего самолета $v_y = 2,8$ м/с на режиме посадки ($u_\infty = 79$ м/с, $\Gamma_0 = 833$ м²/с) и $v_y = 2,1$ м/с на крейсерском режиме полета ($u_\infty = 250$ м/с, $\Gamma_0 = 605$ м²/с). Для самолета В-757 ($l = 38$ м, $m = 109$ т) получается $b \approx 30$ м, $G/b^2 \approx 1200$ Н/м². Этот самолет замечателен тем, что имеет очень большую (измеренную в летном эксперименте) максимальную касательную скорость в вихре (до 100 м/с – действительно, маленький торнадо), хотя относится к классу средних самолетов.

Вот что прощуршали мне листья в осеннем лесу и прокаракали вороны во франкфуртском аэропорту...

Примечание 1. Циркуляция скорости Γ (ее размерность $[\Gamma] = \text{м}^2/\text{с}$) есть мера завихренности потока. Она определяется как интеграл вдоль замкнутой кривой L от произведения проекции скорости на касательную к этой кривой v_t и элемента длины кривой ds :

$$\Gamma = \oint_L v_t ds.$$

Примечание 2. Расстояние между свободными вихрями b несколько меньше размаха крыла l . Для крыла с эллиптическим распределением циркуляции $\Gamma(z)$ (такое распределение в определенном смысле является оптимальным) $b = (\pi/4)l$.

Примечание 3. Потенциальный вихрь – это такой вихрь, у которого вся завихренность сосредоточена в центре и вокруг этого центра происходит вращение частиц газа без вращения вокруг собственной оси. На расстоянии r он индуцирует скорость

$$v_i(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}.$$

Путешествие на воздушном шаре

С. ВАРЛАМОВ

ВОЗДУШНЫЙ ШАР С ГОРЕЛКОЙ ДЛЯ ПОДОГРЕВА ВОЗДУХА сейчас не является диковинкой. Такое средство для полетов гораздо безопаснее, чем оболочка, наполненная водородом, и много дешевле, чем шар, наполненный гелием.

Оболочка воздушного шара сделана из прочной, гибкой и термостойкой ткани. Воздух, окружающий шар, при температуре 0 °С имеет вблизи поверхности земли плотность $\rho_0 = 1,3$ кг/м³. Плотность подогретого до 100 °С воздуха составляет $\rho_1 = 1,3$ кг/м³ \times 273/373 = 0,95 кг/м³. Чтобы поднять в воздух человека (массой 100 кг), корзину (100 кг),

оболочку шара (100 кг) и запас топлива с горелкой (100 кг), нужно, чтобы диаметр шара с горячим воздухом был равен примерно 13 м (см., например, статью А. Стасенко «Как попасть на Тайнственный остров» в «Кванте» №1 за этот год). Конечно, реальный воздушный шар вовсе не имеет форму геометрически правильного шара и температура воздуха в нем не такая высокая, т.е. размеры шара должны быть больше тех, что мы получили в качестве оценки, но его характерный размер оценен правильно. Если максимальная температура, до которой разрешается нагревать воздух в шаре по соображениям безопасности, достигает 150 °С, то такой шар может взять в полет не одного, а трех пассажиров или какой-нибудь дополнительный полезный груз.

Размеры оболочки (максимальный объем, который можно заполнить горячим воздухом) путешественники на шаре во время полета изменять не могут, поэтому для управления грузоподъемностью шара то включается, то выключается горелка. Шар может не двигаться относительно окружающей его воздуха лишь в те редкие мгновения, когда сила тяжести и архимедова сила, действующие на шар, в сумме дают ноль. Если в это время горелка не работает, то через некоторое время шар начнет опускаться, так как воздух в нем постепенно охлаждается. Если же горелка работает, то продолжаю-

(Продолжение см. на с.34)

...горячие тела должны охлаждаться при соприкосновении с холодным, так как оно замедляет теплотворное движение частиц; наоборот, холодные тела должны нагреваться вследствие ускорения движения при соприкосновении.

Михаил Ломоносов

...находящийся в контакте со льдом воздух лишается части своей теплоты и поэтому сгущается и становится тяжелее, чем теплый воздух остальной части комнаты. Вследствие этого он опускается, и его место вокруг льда занимает более теплый воздух...

Джозеф Блэк

Лучистая теплота рассматривается как колебательное движение эфира.

Рудольф Клаузиус

Называть то, что находится между печкой и нами, лучистой теплотой столь же дико, как если бы энергию вращающегося махового колеса считать за особый вид теплоты. ...Передача теплоты может происходить тремя способами: 1) теплопроводностью, 2) конвекцией (переносом), 3) через какие-либо, одну или несколько, формы энергии: механическую, электрическую, световую.

Орест Хвольсон

А так ли хорошо знакома вам теплопередача?

ЗА ВЫДЕРЖКАМИ ИЗ УЧЕНЫХ ТРУДОВ СКРЫВАЕТСЯ растаявшаяся на столетия дискуссия о природе, или, как ее называл Ломоносов, «причине» тепла. Это путь создания и ниспровержения многих, как затем выяснилось, ложных представлений о строении тел и их способности передавать энергию своему окружению. Каждая модель — например «невесомый» теплород, успешно объяснявший явление теплопередачи, — продвигала наши знания на сколько-то шагов вперед, но затем, увы, тормозила научный прогресс, пока ей на смену не приходила новая модель, более точно описывающая реальность.

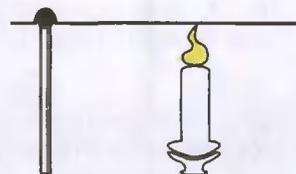
Размышления над способами передачи тепла помимо практической пользы, получаемой от построенных приборов, машин, сооружений, внесли важный вклад и в фундаментальную науку. Попытки разрешить парадоксы теплового излучения привели к возникновению квантовых представлений; объяснение теплопроводности вскрыло тонкие эффекты теории твердого тела и кинетической теории газа; различные режимы возникновения конвекции нашли толкование в терминах недавно родившейся дисциплины — синергетики, или неравновесной термодинамики. Все это — достижения только что ушедшего XX века, а отнюдь не «дела давно минувших дней».

Однако для более тесного знакомства с теплопередачей не обязательно сразу же подниматься к вершинам науки: и у подножья есть много интересных, для кого-то простых, а для кое-кого вовсе не тривиальных проблем. Попробуем для начала разобрататься с ними.

Вопросы и задачи

1. Половина ледяной поверхности пруда с начала зимы была покрыта толстым слоем снега, а другая половина — расчищена для катания на коньках. На какой половине толщина льда больше?
2. Если головку спички обмотать тонкой медной

проволокой, которую затем ввести в пламя свечи, то через несколько секунд спичка воспламенится. Почему?



3. Если дотронуться пальцем до холодного металла, например до алюминиевой ванночки для льда, только что вынутой из морозильника, палец может «прилипнуть» к металлу. Как это объяснить?

4. Почему капля воды на слабо накаливаемой плите почти мгновенно с шипением испаряется, в то время как на сильно накаливаемой плите она держится долго?

5. Нельзя ли вместо второй оконной рамы на зиму просто вставлять в одну раму стекло двойной толщины?

6. Если пробирку с водой, взятой при нуле градусов Цельсия, нагревать в верхней ее части, то воду вверху можно даже довести до кипения, в то время как в нижней части пробирки вода долгое время будет оставаться холодной, так что даже не расплавится удерживаемый внизу кусочек льда. Почему?

7. Желая охладить кастрюлю с водой до комнатной температуры как можно быстрее, хозяйка поставила ее на лед. Правильно ли это?

8. Пламя горелки коптит. Если поднести сверху вертикальную стеклянную трубку, копоть пропадает, однако появляется снова, если трубку вверху закрыть. Почему?

9. На подоконнике был оставлен на ночь сосуд с мутной водой. К утру муть сохранилась только у той стенки, которая обращена к комнате. В какое время года был произведен этот опыт?

10. Имеет ли смысл говорить о «температуре в тени» и о «температуре на солнце»?

11. Изменится ли высота полета воздушного шара, если он в летний день попадет в тень от облака?

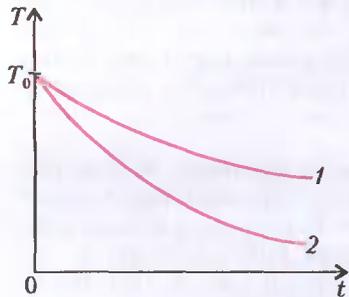
12. Сплошной цилиндр из чугуна с диаметром, равным его высоте, хорошо прогрели в кипящей

воде. Когда он быстрее охладится до комнатной температуры: если его поставить на стол вертикально или положить на бок?

13. Почему, заглянув через отверстие внутрь раскаленной печи, мы не увидим четких контуров находящихся там предметов?

14. При нагревании куска стали до температуры $800\text{ }^{\circ}\text{C}$ можно наблюдать яркое вишнево-красное каление, а вот прозрачный стерженек плавящегося кварца при той же температуре совсем не светится. В чем причина такого поведения кварца?

15. Два тела одинаковой формы и размеров нагреты до начальной температуры T_0 , изолированы друг от друга и помещены в вакуум. Одно из тел сделано из стекла, другое — из графита. Можно ли по приведенному графику зависимости температуры остывающих тел от времени определить, какая из кривых отвечает стеклу, а какая — графиту?



16. Зажженную свечу боковой поверхностью прикрепляют к стене. Куда будет стекать стеарин — к стене или в противоположную сторону?

Микроопыт

Положите на листок плотной белой бумаги булавку или металлическую скрепку. Поводите листком над зажженной свечой до тех пор, пока бумага не станет желтеть и обугливаться. Затем сбросьте булавку или скрепку. Опишите, как будут выглядеть отдельные участки бумаги.

Любопытно, что...

...английский физик Румфорд, изучавший все виды теплопередачи, открывший конвекцию газов и жидкостей, нашедший связь между отражением тепловых лучей и их излучением, опытным путем пришел к выводу, что жидкости... вообще не проводят тепло.

...большая теплопроводность металлов по сравнению с неметаллами объясняется тем, что в передаче тепла в металлах помимо кристаллической решетки принимают участие и свободные электроны. Это отражает и тот факт, что отношение теплопроводности к электропроводности одинаково для всех металлов.

...при энергичном кипении капли жидкости вокруг нее образуется «паровая рубашка», настолько плохо проводящая тепло, что можно, например, на ладони без опаски держать каплю жидкого азота, имеющего температуру минус 196 градусов Цельсия. Однако обычная капля кипятка сильно обжигает руку, поскольку тепло уходит от капли к руке и паровой оболочки не возникает.

...воздух остается хорошим теплоизолятором, пока речь идет о небольших его объемах, в которых

тепло не переносится путем конвекции. Именно поэтому так долго могут «держаться» тепло пенопласт, шерсть и мех, заключающие в себе множество крохотных воздушных объемчиков в порах и между волокон.

...в плоском горизонтальном слое подогреваемой снизу жидкости при определенных режимах нагрева самопроизвольно возникает кооперативное движение упорядоченных пространственных структур — образуются так называемые ячейки Бенара, имеющие вид шестигранных сот, в каждой из которых наблюдается собственный конвективный процесс. Эти ячейки — один из ярких примеров самоорганизации материи, а опыты с ними, проведенные на рубеже XIX–XX веков, произвели настолько глубокое впечатление на современников, что вовлекли в исследования конвекции многих ученых, в том числе знаменитого Рэлея.

...примерно полтора столетия назад такие крупные ученые, как Гельмгольц и лорд Кельвин, придерживались теории, по которой солнечное излучение поддерживается за счет тепла, выделяемого при сжатию Солнца. Позднее расчеты показали, что этого тепла было бы явно недостаточно — наблюдаемая интенсивность излучения обеспечивается значительно большей энергией ядерных реакций внутри нашей звезды.

...одним из бытовых примеров подавления теплопередачи может служить изобретение термоса, в котором все три ее вида удалось свести к минимуму. Однако рано или поздно налитая в термос горячая жидкость все-таки остывает. Подумайте, какие же «лазейки» находит тепло.

...следованием законов, которым подчиняется излучение, позволило создать приборы, с огромной точностью определяющие температуру таких недоступных для прямого контакта тел, как, например, раскаленные в плавильной печи металлы или далекие звезды (причем и в диапазонах невидимых глазом лучей).

Что читать в «Кванте» о теплопередаче

(публикации последних лет)

1. «Как кипит вода?» — 1999, Приложение №6, с.26;
2. «Дом, который построил...» — 1999, Приложение №6, с.60;
3. «Жидкий азот и медная гайка» — 2000, Приложение №3, с.109;
4. «Где найти прошлогоднюю зиму?» — 2000, №5, с.36;
5. «Как чайник стал таймером» — 2001, №5, с.36;
6. «Этот ужасный космический холод» — 2001, Приложение №5, с.68;
7. «Костры в поле и русская баня» — 2002, №1, с.31;
8. «Калейдоскоп «Кванта» — 2002, №1, с.32; №3, с.32;
9. «Тепловые свойства воды» — 2002, №3, с.10;
10. «О физике на приусадебном участке (зимние зарисовки)» — 2003, №1, с.27.

Материал подготовил
А.Леонovich

(Начало см. на с.31)

щийся подогрев воздуха приведет к тому, что шар начнет подниматься вверх. Ситуация напоминает эквилибриста на канате, который должен непрерывно балансировать, чтобы не упасть. Поскольку при движении в воздухе (вверх или вниз) шар испытывает сопротивление воздуха, то скорость его очень быстро устанавливается, т.е. сумма всех действующих на шар сил, включая силу сопротивления, практически всегда равна нулю.

А с какой именно установившейся скоростью будет опускаться шар, если, например, температура теплого воздуха внутри шара стала на 1°C меньше, чем температура, при которой сила тяжести компенсируется архимедовой силой? Давайте разберемся.

Воздушный шар имеет в нижней части отверстие, через которое воздух нагревают. Через это же отверстие воздух внутри шара сообщается с окружающим шар холодным воздухом. После выключения горелки воздух в верхней части объема шара еще некоторое время остается горячим, а в нижней части достаточно быстро принимает температуру окружающей среды. Воздух — плохой проводник тепла, поэтому охлаждение горячего воздуха в шаре приводит к тому, что в нижнюю часть шара входит воздух при температуре окружающей среды. При этом форма шара практически не изменяется. Таким образом, грузоподъемность шара обеспечивает одна и та же масса нагретого воздуха при постоянном давлении, а не один и тот же объем воздуха.

Если в какой-то момент времени t сила тяжести компенсируется подъемной силой при температуре горячего воздуха $t_0 = 100^\circ\text{C}$, то выполнялось равенство

$$Mg = (\pi D^3/6)\rho_0(1 - 273/373) = F(t_0).$$

После того как горячий воздух остыл на 1°C , подъемная сила уменьшилась:

$$F(t_1) = (372/373)(\pi D^3/6)\rho_0(1 - 273/372) = F(t_0)(1 - 0,01),$$

и это уменьшение составило 1%.

Разумно предположить, что шар при движении в воздухе испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное площади поперечного сечения S , квадрату скорости движения относительно воздуха u и плотности окружающего воздуха ρ_0 :

$$F_c \sim S \frac{\rho_0 u^2}{2}, \text{ или } F_c = KS \frac{\rho_0 u^2}{2}.$$

Коэффициент пропорциональности K зависит от формы тела. В нашем случае следует брать $K = 0,2$. Оценка скорости опускания шара, проведенная в соответствии с указанной зависимостью силы сопротивления от скорости, дает $u \approx 1,5$ м/с. Чтобы скорость спуска нашего шара ($M = 400$ кг, $D = 13$ м) была меньше 1 м/с (из соображений безопасности приземления, например), нужно, чтобы подъемная сила и сила тяжести отличались меньше чем на 0,5%, т.е. температура не должна отличаться больше чем на $0,5^\circ$ от «равновесной».

Сделаем еще одну оценку. Рассчитаем, какую массу m балласта следует выбросить за борт корзины воздушного шара, чтобы восстановить равенство силы тяжести и подъемной силы при понижении температуры горячего воздуха от 100°C до 99°C (окружающий шар воздух имеет температуру 0°C):

$$(M - m)g = Mg(1 - 0,01),$$

откуда

$$m = 4 \text{ кг}.$$

Бытует известное заблуждение, что воздушный шар поднимается до тех пор, пока не достигнет слоев воздуха, имеющих столь малую плотность, что выталкивающая сила становится равной силе тяжести, действующей на шар. Это утверждение можно считать справедливым только для шаров с герметичной оболочкой, заполненной водородом, гелием или каким-либо другим газом с плотностью, меньшей плотности воздуха при одинаковых температуре и давлении. При этом неважно, будет оболочка растяжимой или жесткой. К воздушному шару с горячим воздухом это утверждение неприменимо, так как шар прекращает подниматься вверх не потому, что плотность воздуха снаружи из-за подъема уменьшается, а потому, что воздух прекращает нагреваться! Воздух в шаре без подогрева охлаждается, и его плотность увеличивается.

А какова роль оболочки шара в процессе охлаждения воздуха? Потери тепла через оболочку происходят посредством двух механизмов теплопередачи: за счет излучения и за счет теплопроводности (которая приводит к возникновению конвекции). Оценим вклады каждого механизма в «общее дело».

Оболочка шара обычно делается из материи, не пропускающей воздух и имеющей плотность, чуть меньшую плотности воды (10^3 кг/м³). Исходя из наших оценок размера шара ($D = 13$ м) и массы оболочки (100 кг), получим, что толщина оболочки равна примерно 0,2 мм. Воздух, прилегающий к оболочке, по обе стороны от нее находится в движении. Внутри оболочки соприкасающийся с ней воздух охлаждается и опускается вниз, а снаружи — нагревается и поднимается вверх. (Воздух внутри оболочки движется аналогично вихревому движению клубов дыма, поднимающихся в холодном воздухе. При этом горелка обеспечивает дополнительный подогрев воздуха в центральной части шара. Отличие состоит в том, что в случае воздушного шара оболочка имеется, а в случае клубов дыма ее нет.)

Оболочка изнутри подогревается излучением горячего воздуха и благодаря конвекции горячего воздуха внутри шара. Снаружи поток излучения от оболочки превышает приток энергии за счет излучения окружающего холодного воздуха, и, кроме того, энергию от оболочки уносит конвек-

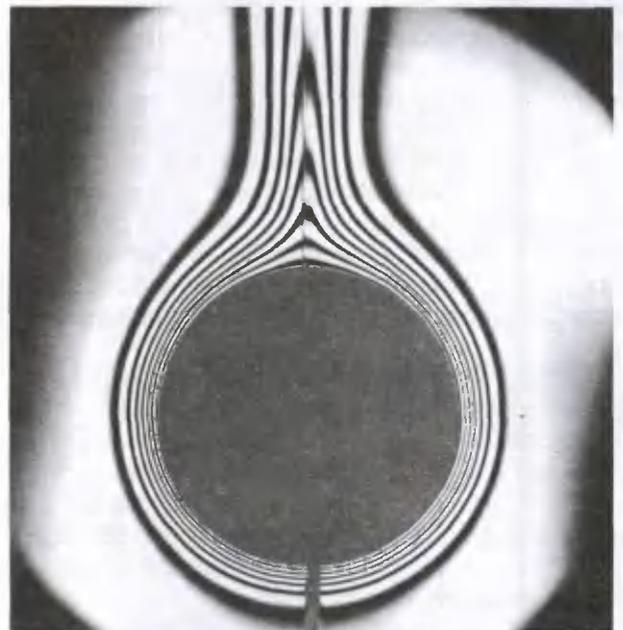


Рис. 1. Свободная конвекция от горизонтального цилиндра

тивный поток нагретого воздуха. Разумно предположить, что оболочка, находясь на границе раздела горячего и холодного воздуха, имеет температуру где-то между 100°C и 0°C . На рисунке 1 показано распределение температуры в воздухе вокруг нагретого на 9°C выше окружающего воздуха длинного медного цилиндра диаметром 6 см. Рисунок взят из «Альбома течений жидкостей и газа» М. Ван-Дайка. Визуализация разных температур осуществлялась интерферометрическим методом. Видно, что вокруг горячего тела возникает поток воздуха, а толщина слоя движущегося воздуха составляет малую часть диаметра тела. По-видимому, ситуация будет такой же и для рассматриваемого нами воздушного шара.

Трудно было удержаться и не привести еще один рисунок из этого Альбома. На рисунке 2 показаны линии тока воздуха с дымом при конвективном движении. Воздух движется в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами. Внутренний цилиндр имеет большую температуру, чем внешний.

Конечно, можно провести соответствующие расчеты и выяснить, сколько тепла теряет наш воздушный шар через свою оболочку, но оставим это на потом. А сейчас предлагаем вам самостоятельно получить ответы на следующие вопросы.

1. Сколько топлива нужно взять с собой путешественникам на воздушном шаре, чтобы продержаться в воздухе один час?

2. Какой запас балласта должны иметь на всякий случай (вдруг сломается горелка) путешественники, чтобы они могли опуститься на землю с высоты 1 км и обеспечить скорость приземления не больше 1 м/с?



Рис. 2. Линии тока в конвективном движении между соосными цилиндрами

3. Когда выгоднее путешествовать на воздушном шаре, т.е. при какой температуре окружающего воздуха один килограмм топлива обеспечивает максимальное время полета?

Теоремы Менелая и Чебы

А. ЕГОРОВ

ЭТА СТАТЬЯ ПОСВЯЩЕНА ДВУМ ЗАСЛУЖЕННО ПОПУЛЯРНЫМ у школьников теоремам и их приложениям. В последние годы даже в вариантах письменных вступительных экзаменов попадают задачи, решение которых сильно упрощается с помощью теорем Менелая или Чебы. Нас же все-таки будет больше интересовать их применение к доказательству некоторых геометрических фактов.

Для того чтобы иметь возможность сформулировать теоремы Менелая и Чебы в максимальной общности, нам понадобится понятие об ориентированных отрезках и их отношениях.

Ориентированные отрезки

Пусть на прямой l заданы отрезки AB и CD . Рассмотрим векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} (рис. 1). Из школьного курса геометрии

известно, что существует такое число k , что $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$. Если $k > 0$, векторы называются одинаково направленными; если

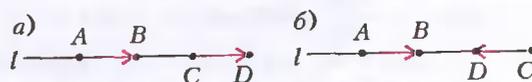


Рис. 1

$k < 0$, говорят, что векторы противоположно направлены (см. рис. 1, а и 1, б соответственно).

При этом отрезки AB и CD мы будем называть одинаково направленными, если $k > 0$, и противоположно направленными, если $k < 0$. Само же число k будем называть отношением ориентированных отрезков: $\frac{AB}{CD} = k$. Легко видеть,

что при $k > 0$ это отношение есть просто отношение длин отрезков, а при $k < 0$ — отношение длин, взятое со знаком «минус».

В этой статье все отношения вида $\frac{AB}{CD}$ будут пониматься как отношения ориентированных отрезков.

Если отрезки AB и CD лежат не на одной прямой, а на параллельных прямых, тоже можно говорить об одинаково и противоположно ориентированных отрезках и их отношениях (рис. 2). Например, пусть A и B — точки плоскости, а AA_1 и BB_1 — перпендикуля-

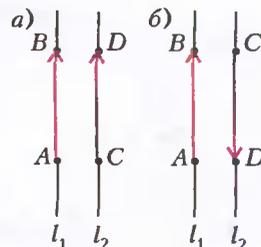


Рис. 2

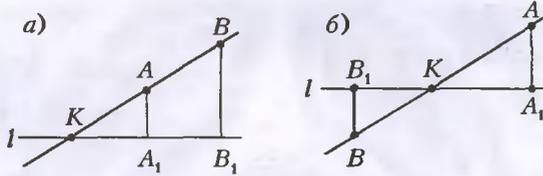


Рис. 3

ры, опущенные из этих точек на некоторую прямую l (рис. 3). Тогда, если точки A и B лежат по одну сторону от прямой l , то отрезки A_1A и B_1B ориентированы одинаково (см. рис. 3, а), а если по разные стороны – противоположно (см. рис.

3, б), при этом в обоих случаях $\frac{KA}{KB} = \frac{A_1A}{B_1B}$.

Отметим еще такие важные свойства отношений:

1) $\frac{AB}{BA} = -1$; 2) $\frac{AB}{CD} = \frac{BA}{DC}$.

Пусть теперь на прямой AB задана еще третья точка – C . На рисунке 4 показано, какими могут быть отношения $\frac{CA}{CB} = k$ в зависимости от положения точки C на прямой AB .

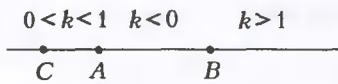


Рис. 4

Так, если C лежит на отрезке AB , то $k < 0$, если точка C левее точки A , то $0 < k < 1$, если же правее точки B , то $k > 1$.

Таким образом, задавая отношение ориентированных отрезков $\frac{CA}{CB}$, мы *однозначно* определяем положение точки C на прямой AB .

Упражнение 1. Докажите это.

Замечание. Точки C , для которой отношение $\frac{CA}{CB} = 1$, на прямой AB нет (впрочем, при желании можно присоединить к прямой бесконечно удаленную точку ∞ и считать, что именно для нее $\frac{A\infty}{B\infty} = 1$). Отметим еще, что простое отношение длин отрезков $\frac{AC}{BC}$ неоднозначно задает точку C на прямой AB – таких точек, как правило, две (исключение – середина отрезка AB , для которой $AC = CB$).

Теорема Менелая

Эта теорема, доказанная в I веке Менелаем Александрийским, часто используется при решении геометрических задач. Она позволяет в некоторых случаях находить отношения отрезков, а также доказывать принадлежность трех точек одной прямой.

Теорема Менелая. Пусть дан треугольник ABC и три точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, AC и AB соответственно. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = 1. \tag{1}$$

Здесь все перемножаемые отношения – это отношения ориентированных отрезков.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть прямая l пересекает прямые AB, AC и BC в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно (рис. 5) и AA', BB', CC' – перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на

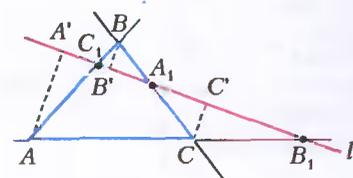


Рис. 5

прямую l . Как было доказано ранее,

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{A'A}{B'B}, \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C'C}{A'A}, \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B'B}{C'C}.$$

Перемножив записанные отношения, имеем

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A'A}{B'B} \cdot \frac{C'C}{A'A} \cdot \frac{B'B}{C'C} = 1,$$

что и требовалось.

Достаточность. Проведем прямую A_1B_1 . Мы должны доказать, что эта прямая пересечет AB в точке C_1 . Прежде всего докажем, что A_1B_1 действительно пересечет AB . Предположим, что A_1B_1 параллельна AB (рис. 6). Но тогда

$$\frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{A_1C}{A_1B} = 1.$$

Отсюда и из равенства (1) следует $\frac{C_1A}{C_1B} = 1$, что невозможно.

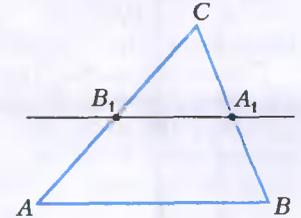


Рис. 6

Пусть \tilde{C} – точка пересечения прямых A_1B_1 и AB . По уже доказанному,

$$\frac{\tilde{C}A}{\tilde{C}B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = 1.$$

Сравнивая с условием, получаем, что

$$\frac{\tilde{C}A}{\tilde{C}B} = \frac{C_1A}{C_1B}.$$

А поскольку речь идет об отношениях ориентированных отрезков, $\tilde{C} = C_1$. Что и требовалось.

Итак, теорема Менелая полностью доказана.

Замечания

1. Иногда произведение отношений в теореме Менелая записывают так:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} = -1.$$

2. При решении конкретных вычислительных задач, если известно что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, можно не заботиться о записи отношений ориентированных отрезков в формуле (1), а ограничиться отношениями их длин. При этом следует иметь в виду, что если заменить в (1) ориентированные отношения отношениями длин, обратная теорема перестает быть верной, т.е. точки A_1, B_1, C_1 , для которых выполняется (1), не обязаны лежать на одной прямой.

Упражнение 2. Приведите пример этого.

При решении следующих упражнений имейте в виду, что самым непростым делом является отыскание треугольника, к которому следует применить теорему Менелая.

Упражнения

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки K и L такие, что $AK/KB = 3, BL/LC = 4$. Прямая KL пересекает AC в точке M . Найдите AM , если $AC = b$.

4. Плоскость пересекает ребра AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках K, L, M, N соответственно. Докажите, что

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1.$$

5. Сфера касается сторон AB, BC, CD и DA пространственного четырехугольника в точках K, L, M и N соответственно. Докажите, что точки K, L, M и N лежат в одной плоскости.

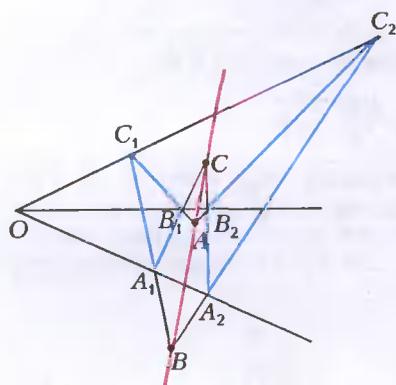
6. Дан четырехугольник $ABCD$. Продолжения его сторон AB и CD пересекаются в точке E , продолжения сторон AD и BC

пересекаются в точке F . Докажите, что середины отрезков AC , BD и EF лежат на одной прямой.

Теоремы Дезарга и Паппа

Нетривиальными примерами использования теоремы Менелая являются доказательства теорем, о которых мы сейчас расскажем.

Теорема Дезарга. *Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены на плоскости так, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 имеют общую точку O (рис. 7). Пусть A – точка пересечения*



прямых B_1C_1 и B_2C_2 , B – точка пересечения A_1C_1 и A_2C_2 , C – точка пересечения A_1B_1 и A_2B_2 . Тогда точки A, B и C лежат на одной прямой.

Доказательство. Из теоремы Менелая для треугольника OB_1C_1 и прямой AB_2C_2 (точка A лежит на B_1C_1 , B_2 – на OB_1 , C_2 – на OC_1) следует, что

$$\frac{AB_1}{AC_1} \cdot \frac{C_2C_1}{C_2O} \cdot \frac{B_2O}{B_2B_1} = 1.$$

Рис. 7

Аналогично, из треугольников OC_1A_1 и OA_1B_1 , пересекаемых прямыми BC_2A_2 и CA_2B_2 соответственно, имеем

$$\frac{BC_1}{BA_1} \cdot \frac{A_2A_1}{A_2O} \cdot \frac{C_2O}{C_2C_1} = 1,$$

$$\frac{CA_1}{CB_1} \cdot \frac{B_2B_1}{B_2O} \cdot \frac{A_2O}{A_2A_1} = 1.$$

Перемножив выписанные равенства, после сокращений получаем

$$\frac{AB_1}{AC_1} \cdot \frac{BC_1}{BA_1} \cdot \frac{CA_1}{CB_1} = 1.$$

Но точки A, B и C лежат на сторонах или продолжениях сторон треугольника $A_1B_1C_1$ и по теореме Менелая лежат на одной прямой.

Теорема Дезарга является одной из первых и важнейших теорем проективной геометрии. Она была доказана в первой половине XVIII века французским математиком и инженером Жераром Дезаргом.

Вот еще одна замечательная теорема, доказанная во второй половине III века древнегреческим математиком Паппом Александрийским.

Теорема Паппа. *На одной из пересекающихся прямых взяты точки A_1, B_1, C_1 , на другой – точки A_2, B_2, C_2 (рис. 8, а). Прямые A_1B_2 и A_2B_1 , B_1C_2 и B_2C_1 , C_1A_2 и C_2A_1 пересекаются в точках C, A и B соответственно. Утверждается, что точки A, B и C лежат на одной прямой.*

Мы ограничимся указанием, полагая, что читатель сам восстановит детали доказательства. Рассмотрим треугольник $A'B'C'$, где A' – точка пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1 , B' – точка пересечения B_1C_2 и B_2C_1 , C' – точка пересечения A_1B_2 и B_1C_2 (рис. 8, б). Точки A, B и C лежат на прямых $B'C', A'B'$ и $A'C'$ соответственно. Теорема будет доказана, если будет доказано равенство

$$\frac{AA'}{AC'} \cdot \frac{BB'}{BA'} \cdot \frac{CC'}{CB'} = 1.$$

Для этого запишите теорему Менелая для треугольника $A'B'C'$ и пяти прямых $AB_2C_1, BC_2A_1, CA_2B_1, A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$,

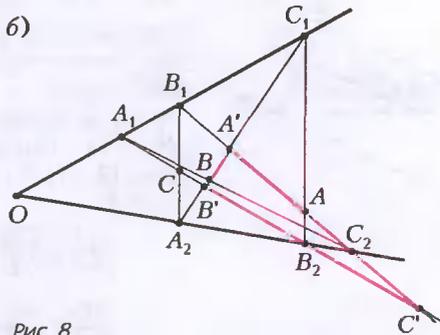
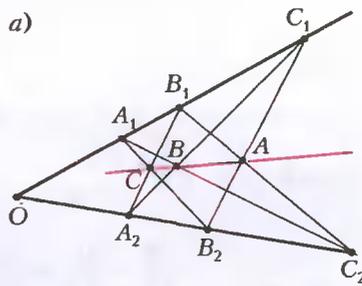


Рис. 8

пересекающих стороны (или их продолжения) этого треугольника, и перемножьте полученные равенства. (Например, для прямой AB_2C_1 следует, что $\frac{AA'}{AC'} \cdot \frac{B_2C'}{B_2B'} \cdot \frac{C_1A'}{C_1B'} = 1$.)

Наконец, попробуйте решить следующие упражнения.

Упражнения

7. **Теорема Паскаля.** Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой.

8. **Прямая Симсона.** Пусть P – точка окружности, описанной около треугольника ABC , а точки A_1, B_1, C_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, AC и AB . Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой.

Теорема Чевы

Эта теорема была доказана итальянским инженером и математиком Джованни Чевой в 1678 году. Она часто помогает решать задачи о тройках прямых, проходящих через одну точку, а также доказывать теоремы о пересечении троек прямых в одной точке.

Теорема Чевы. *Пусть дан треугольник ABC и три прямые, проходящие через его вершины. Прямая, проходящая через вершину A , пересекает прямую BC в точке A_1 . Прямая, проходящая через вершину B , пересекает AC в точке B_1 . Наконец, прямая, проходящая через точку C , пересекает AB в точке C_1 . Эти прямые проходят через одну точку или параллельны тогда и только тогда, когда*

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = -1. \tag{2}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть через некоторую точку P проходят три прямые, как показано на рисунке 9. Применим теорему Менелая к треугольнику ABB_1 , пересеченному прямой CC_1 :

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{PB}{PB_1} \cdot \frac{CB_1}{CA} = 1.$$

Аналогично, из треугольника BB_1C по теореме Менелая

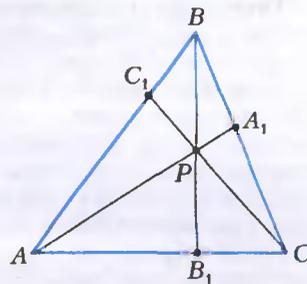


Рис. 9

имеем

$$\frac{AB_1}{AC} \cdot \frac{PB}{PB_1} \cdot \frac{A_1C}{A_1B} = 1.$$

Разделив первое из соотношений на второе, получим

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{AC}{CA} = 1.$$

Осталось заметить, что

$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{B_1C}{B_1A} \text{ и } \frac{AC}{CA} = -1.$$

Необходимость доказана для случая пересекающихся прямых.

Если же прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 параллельны (рис. 10), то по теореме Фалеса

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{CA_1}{CB_1},$$

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{BC}{BA_1}.$$

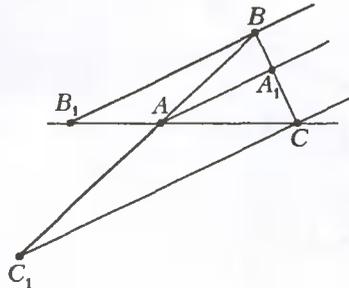


Рис. 10

Перемножив пропорции, получим

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{BC}{CB} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = -\frac{A_1C}{A_1B},$$

т.е.

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = -1.$$

Необходимость доказана в полном объеме.

Достаточность. Пусть для точек A_1 , B_1 и C_1 на прямых BC , AC и AB выполнено соотношение (2), а прямые CC_1 и BB_1 пересекаются в точке P . Прямая AP пересечет прямую BC в некоторой точке \tilde{A} .

Упражнение 9. Докажите это.

По уже доказанному,

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{\tilde{A}B}{\tilde{A}C} = -1.$$

Отсюда и из соотношения (2) следует

$$\frac{\tilde{A}B}{\tilde{A}C} = \frac{A_1B}{A_1C},$$

что и означает совпадение точек \tilde{A} и A_1 .

Если же прямые CC_1 и BB_1 параллельны, то из (2) следует, что и прямая AA_1 будет им параллельна.

Упражнение 10. Докажите это.

Замечание. Произведение отношений в теореме Чевы иногда записывают так:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (2')$$

Упражнение 11. Замечательные точки треугольника. Докажите, что в одной точке пересекаются: а) медианы; б) высоты; в) биссектрисы; г) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности с противоположными сторонами (точка Жергонна); д) отрезки, соединяющие вершины с точками касания вневписанной окружности, противоположными сторонам треугольника (точка Нагеля); е) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с противоположными сторонами; ж) отрезки, соединяющие вершины треугольника с вершинами правильных треугольников, построенных на его противоположных сторонах во внешнюю сторону (точка Торричелли).

Теорема Чевы в форме синусов

Иногда теорему Чевы бывает удобно применять, вводя вместо отношений отрезков отношения синусов некоторых углов. Вот новая формулировка теоремы Чевы.

Теорема. Пусть на сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 , C_1 . Прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 проходят через одну точку или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin \angle A_1AB}{\sin \angle CAA_1} \cdot \frac{\sin \angle B_1BC}{\sin \angle ABB_1} \cdot \frac{\sin \angle C_1CA}{\sin \angle BCC_1} = 1.$$

Доказательство. Мы должны переписать «в синусах» теорему Чевы. Ее мы запишем в форме (2'):

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Докажем эту теорему для случая, когда точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на сторонах треугольника. Случаи иного расположения точек требуют несущественных изменений рассуждений. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Остальные обозначения ясны из рисунка 11.

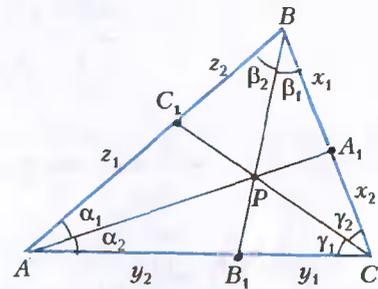


Рис. 11

Применяя теорему синусов к треугольникам ABA_1 и ACA_1 , имеем

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta} = \frac{x_1}{AA_1}, \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma} = \frac{x_2}{AA_1},$$

или

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{x_1 \sin \beta}{x_2 \sin \gamma}.$$

Аналогично рассуждая о парах треугольников VAB_1 и VCB_1 , а также ACC_1 и BCC_1 , имеем

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{y_1 \sin \gamma}{y_2 \sin \alpha}, \quad \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{z_1 \sin \alpha}{z_2 \sin \beta}.$$

Перемножив записанные равенства, получим

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{z_1}{z_2} = 1,$$

т.е. условие нашей теоремы равносильно обычной теореме Чевы.

В этом рассуждении мы обошлись без привлечения отношений ориентированных отрезков. В общем случае необходимо рассматривать не только ориентированные отрезки, но и ориентированные углы, полагая, например, что $\angle ABC = -\angle CBA$ и т.п. Впрочем, эти трудности легко преодолеваются и теорема остается верной.

Легко ли быть квадратной рамкой?

А. СТАСЕНКО

Действительно, что только люди не делали с квадратной рамкой...

Однажды ее расположили в плоскости прямого бесконечного провода так, что две ее стороны оказались параллельными ему (рис.1,а), да и пропустили по проводу ток, зависимость которого от времени задана (рис.1,б). И тут рамку стал пронизывать поток магнитного поля. Но рамка не оказалась безучастной к этому вторжению в ее границы: она ответила возникновением своего тока, причем такого, что магнитное поле этого тока препятствовало росту поля-интервента.

Эту «сказку» можно записать при помощи законов физики.

Если ток в прямом проводе в данный момент времени равен I , то порожденное им магнитное поле на расстоянии r от тока, как известно, равно

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}. \quad (1)$$

Тут в знаменателе не случайно появилась длина окружности — это следствие из теоремы о циркуляции магнитного поля: произведение магнитного поля на длину окружности пропорционально току, проходящему через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. А множитель μ_0 — магнитная постоянная — говорит всего лишь о том, что мы работаем в международной системе единиц, т.е. в СИ. На рисунке 1,а показано и направление магнитного поля — это крестик, т.е. «хвост» стрелы, уходящей за плоскость рисунка.

Поток этого поля через узкую элементарную площадку площадью $2adr$ (выделена на рисунке 1, а) равен $B \cdot 2adr$. Значит, чтобы найти поток через всю площадь квадратной рамки, нужно просуммировать все эти элементарные потоки (т.е. проинтегрировать). Получим

$$\Phi = \int_{r=2a}^{r=4a} B \cdot 2adr = \frac{\mu_0 a I}{\pi} \int_{2a}^{4a} \frac{dr}{r} = LI, \quad (2)$$

где

$$L = \frac{\mu_0 a}{\pi} \ln 2.$$

Этот множитель L , стоящий при токе, называется коэффициентом взаимной индукции прямого провода и квадратной рамки. Видно, что он зависит только от размеров рамки и взаимного расположения прямого провода и рамки, но не зависит от тока, который, в принципе, может как угодно изменяться во времени. Поэтому введение такого коэффициента очень удобно при исследовании эволюции токов во взаимосвязанных (через магнитные поля) контурах.

Но что же дальше? Поскольку ток изменяется во времени (см. рис.1,б), изменяется и поток магнитного поля через площадь, ограниченную рамкой. А изменение потока, согласно закону Фарадея, индуцирует в контуре рамки электродвижущую силу

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(L \frac{I_0 t}{\tau} \right) = -\frac{LI_0}{\tau}. \quad (3)$$

В нашем частном случае она получилась постоянной на отрезке времени $0 < t < \tau$, поскольку мы приняли линейный закон роста тока со временем. А о чем говорит знак «минус»? А как раз о том, что ЭДС индукции собирается гнать ток в рамке в таком направлении, чтобы этот ток породил собственное магнитное поле, препятствующее возрастанию исходного поля-интервента. Эта вездесущая сопротивляемость Природы каким-либо попыткам извне изменить ее состояние («инертность») и обеспечивает ее устойчивость. В науке это свойство связывают с именами Ле Шателье, Брауна, Ленца...

Итак, ЭДС индукции, вызванная изменением внешнего магнитного поля, породит в рамке ток I_0 , который породит собственное магнитное поле и, значит, его поток Φ_0 через плоскость рамки. Этот поток тоже можно записать в виде

$$\Phi_0 = L_0 I_0,$$

где коэффициент при токе можно назвать коэффициентом самоиндукции рамки. Он, как и L , зависит только от геометрии рамки (ее размера, толщины провода), но здесь мы не будем уточнять выражение для него, а просто оставим L_0 . Поскольку ток в рамке заведомо зависит от времени (ведь его сначала не было, а потом он возник), то соответствующее изменение магнитного потока вызовет к жизни собственную ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_0 = -L_0 \frac{dI_0}{dt}.$$

Так как рамка может обладать собственным электрическим сопротивлением R , то на нем возникнет, согласно закону Ома, падение напряжения $I_0 R$. Теперь осталось записать закон Кирхгофа: сумма падений напряжения на всех элементах электрической цепи (но это громко сказано — у нас всего-то одна рамка) равна сумме всех ЭДС, действующих в этой цепи:

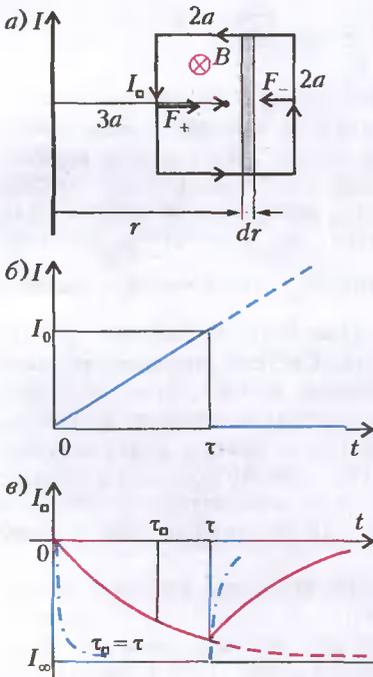
$$I_0 R = -\frac{d\Phi}{dt} - \frac{d\Phi_0}{dt} = -L \frac{dI}{dt} - L_0 \frac{dI_0}{dt}.$$

Это уравнение можно переписать так:

$$\frac{dI_0}{dt} = -\left(I_0 + \frac{L I_0}{R \tau} \right) \frac{R}{L_0}. \quad (4)$$

Его нетрудно решить, но можно сказать кое-что и не решая. Действительно, в начальный момент $t = 0$ ток в рамке равен нулю, значит, его производная максимальна и равна $\left. \frac{dI_0}{dt} \right|_0 = -\frac{LI_0}{L_0 \tau}$. А с течением времени ток возрастает, и в

Рис 1



пределе $t \rightarrow \infty$ правая часть уравнения стремится к нулю, тогда как сила тока стремится к постоянной величине

$$I_{\square} \rightarrow I_{\infty} = -\frac{L I_0}{R \tau}.$$

Конечно, эта величина может быть достигнута, если время τ существования внешнего тока тоже бесконечно велико (см. рис. 1, б; штриховая прямая). Далее, из структуры уравнения видно, что отношение $\frac{L I_0}{R} = \tau_{\square}$ имеет размерность времени.

Это и будет характерное время установления тока в рамке. Все эти черты временной зависимости $I_{\square}(t)$ показаны на рисунке 1, в (для случая $\tau \gg \tau_{\square}$ - штрих-пунктиром). Для желающих укажем и точное решение уравнения:

$$I_{\square}(t) = I_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\square}}} \right).$$

Но что же произойдет, когда внешний ток внезапно исчезнет? Прекратится ли сразу же и ток в рамке? Отнюдь (что значит «нет»). Исчезнет лишь второе слагаемое в правой части уравнения (4). Конечно, сила тока в рамке начнет убывать. Но это значит, что изменится и «направление» собственной ЭДС: теперь падение тока будет создавать такое магнитное поле, убыль потока которого через площадь рамки будет стараться поддержать этот падающий ток. Поистине, все это похоже на инертность характера: «Я тяжел на подъем, но, пустившись в дорогу, могу ехать сколько угодно» (М. Монтень, «Опыты»).

А будут ли действовать на рамку какие-либо силы? Безусловно. Ведь известно, что параллельные токи притягиваются, а антипараллельные отталкиваются. (Этот факт можно объяснить законом Ампера). Согласно направлению токов I и I_{\square} , указанных на рисунке 1, а, на ближнюю сторону рамки будет действовать большая сила отталкивания F_+ , чем сила притяжения F_- на дальнюю, где магнитное поле слабее, поэтому рамка будет отталкиваться от прямого провода. Так что если присоединить рамку к прямому проводу пружиной жесткостью k , то уравнение движения рамки будет иметь вид

$$m \frac{dv}{dt} = -kx + F_+ - F_- = mx'', \quad (5)$$

где x - отклонение от положения равновесия. Конечно, силы будут действовать и на горизонтальные стороны рамки, но эти силы уравновесят друг друга. А вот силы, действующие на вертикальные стороны рамки и лежащие в плоскости прямого тока (нашего рисунка), могут привести к неустойчивости: стоит рамке чуть-чуть выйти из этой плоскости, как они постараются повернуть рамку перпендикулярно плоскости рисунка.

Закрепим рамку на упругих вертикальных нитях (рис. 2, а) так, что в положении равновесия (когда токов нет и нити не закручены) плоскость рамки составляет с плоскостью рисунка некоторый угол, скажем $\gamma_0 = 45^\circ$. Но если нити подвеса упругие,

они сопротивляются закручиванию, стремясь вернуться в первоначальное состояние, так же как растянутая или сжатая пружина стремится вернуться в ненапряженное состояние. В случае пружины возвращающая сила, как уже сказано, равна $-kx$. При закручивании нитей аналогом линейной деформации является отклонение угла от равновесного значения: $\theta = \gamma(t) - \gamma_0$, но при этом возникнет не сила, а (возвращающий) момент силы: $-G\theta$, где G (с размерностью $\text{Н} \cdot \text{м}/\text{рад}$) логично назвать крутильной жесткостью. А вот мерой инертности является уже не масса рамки, а ее момент инерции J (не путать с силой тока!). Таким образом, уравнение крутильных колебаний рамки примет вид

$$J \frac{d\omega}{dt} = J\theta'' = -G\theta + M, \quad (6)$$

где $\omega = \theta'$ - угловая скорость, M - момент внешних сил относительно оси подвеса. Теперь можно определить частоту собственных крутильных колебаний рамки:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G}{J}}$$

(аналогично тому, как из уравнения (5) следует выражение для частоты поступательных колебаний: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$), а также их период:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{G}}.$$

Но чему равен момент внешних сил? Рассмотрим частный случай: время существования тока в линейном бесконечном проводнике очень мало, а именно много меньше периода собственных колебаний рамки, т. е. $\tau \ll T_0$. В такой ситуации говорят, что рамка получила вращательный импульс, или импульс момента сил. Точно так же в случае линейной пружины мы сказали бы, что при условии $\tau \ll 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ и тело массой m подействовал импульс силы. В пределе $\tau \rightarrow 0$ это явление называется ударом. Система получает при этом конечный импульс за исчезающе малый промежуток времени, причем за время этого «щелчка» ее смещение незаметно. Итак, в рассматриваемом случае за время τ рамка не успеет повернуться на заметный угол, так что можно будет вычислить силы, действующие на ее вертикальные стороны, и соответствующий импульс момента этих сил, считая рамку неподвижной.

На рисунке 2, б (вид сверху) крестиком и точками обозначены направления токов в проводниках. Согласно выражению (1), модуль вектора магнитной индукции на расстояниях r_+ и r_- от прямого провода равен, соответственно,

$$B_+ = \mu_0 \frac{I}{2\pi r_+} \quad \text{и} \quad B_- = \mu_0 \frac{I}{2\pi r_-}.$$

Следовательно, силы Ампера, действующие на две вертикальные стороны рамки, равны

$$F_+ = I_{\square} \mu_0 \frac{aI}{\pi r_+} \quad \text{и} \quad F_- = I_{\square} \mu_0 \frac{aI}{\pi r_-}$$

и направлены вдоль соответствующих радиусов, а их суммарный (крутящий) момент относительно оси подвеса составляет

$$M = -F_+ a \sin \alpha_+ - F_- a \sin \alpha_-$$

(плечи сил относительно точки O показаны на рисунке 2, б штрих-пунктирными отрезками). Знак «минус» говорит о том, что угол закрутки рамки отсчитывается против часовой стрелки от положения равновесия, как и принято в приличной правой системе координат. Углы α_{\pm} , точнее их синусы,

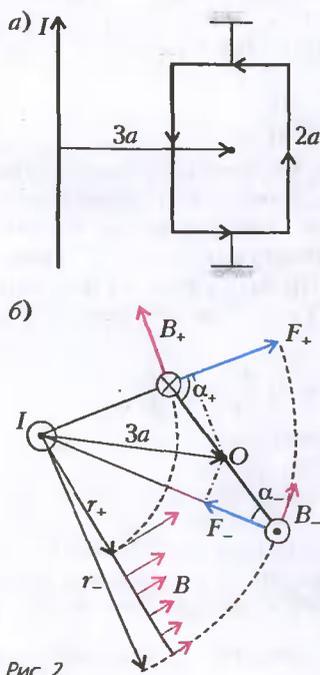


Рис. 2

легко найти по теореме синусов:

$$\frac{\sin(\pi - \alpha_+)}{3a} = \frac{\sin 45^\circ}{r_+}, \text{ откуда } \sin \alpha_+ = \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{a}{r_+},$$

$$\frac{\sin \alpha_-}{3a} = \frac{\sin 135^\circ}{r_-}, \text{ откуда } \sin \alpha_- = \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{a}{r_-},$$

а соответствующие радиусы – по теореме косинусов:

$$r_+^2 = 10a^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}a^2 = a^2 \left(10 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$r_-^2 = a^2 \left(10 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right).$$

Рамку пронизывает магнитный поток, равный, согласно выражению (2),

$$\Phi_{\pm} = \frac{\mu_0 a}{\pi} I \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 a}{\pi} \ln \frac{10 + \frac{3\sqrt{2}}{2}}{10 - \frac{3\sqrt{2}}{2}} I = L_{\pm} \frac{I_0 t}{\tau},$$

где L_{\pm} – коэффициент взаимной индукции для принятой геометрии (когда рамка повернута на 45°).

Понятно, что в течение времени τ крутящий момент постоянен, так что его импульс равен $M\tau$. Учитывая начальные условия: при $t = 0$ должно быть $\theta = 0$ и $\theta' = 0$, найдем уравнение колебательного движения рамки:

$$\theta = \frac{M\tau}{J\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Можно учесть еще, что момент инерции рамки равен

$$J = 2 \frac{m}{4} a^2 + 2 \frac{m}{4} \frac{(2a)^2}{12} = \frac{2}{3} ma^2.$$

Желающий да соберет все выше написанное и, подставив в последнее уравнение, получит ... удовольствие. Особенно, если самостоятельно уточнит приведенные рассуждения.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Изогональное сопряжение в тетраэдре и его гранях

А.ЗАСЛАВСКИЙ, Д.КОСОВ

В СТАТЬЕ «ОПИСАННАЯ И ВПИСАННЫЕ СФЕРЫ ТЕТРАЭДРА» (см. «Квант» № 1) было доказано, что вокруг любого тетраэдра можно описать сферу. Ее центр – точка пересечения перпендикуляров к граням тетраэдра, проходящих через центры описанных около них окружностей. В любой тетраэдр можно вписать сферу, центром которой будет точка пересечения биссекторных плоскостей его двугранных углов. Кроме того, для любого тетраэдра существуют четыре вневписанные сферы, каждая из которых касается одной грани тетраэдра и продолжений трех остальных, и, как правило, еще три сферы, каждая из которых вписана в «корытце», образованное продолжениями двух граней за их общее ребро и двух других граней за концы этого ребра. Таким образом, общее число сфер, касающихся плоскостей всех граней тетраэдра, может быть от 5 до 8.

Кроме того, было доказано, что точки касания грани с вписанной и вневписанной сферами изогонально сопряжены. В этой статье мы расскажем о некоторых следствиях этого факта, но сначала поговорим об изогональном сопряжении.

Изогональное сопряжение в треугольнике

Пусть на плоскости задан треугольник ABC и точка P (рис. 1). Построим прямые, симметричные прямой AP , BP и CP относительно биссектрис соответствующих углов, т.е. AP симметрично отражается относительно биссектрисы угла A , BP – биссектрисы угла B , CP – биссектрисы угла C .

Если эти прямые пересекаются в одной точке P' (а это, как правило, так и будет), то эта точка называется *изогонально сопряженной* точке P относительно треугольника ABC , а отображение $P \rightarrow P'$ называется *изогональным сопряжением* относительно треугольника ABC .

Давайте выясним, какова область определения изогонального сопряжения. Прежде всего, у вершин A , B и C изогонально сопряженных точек нет. Далее, все точки прямых AB , BC и AC при изогональном сопряжении переходят в противоположащие вершины (точки прямой AB , например, переходят в точку C). Ввиду этого мы исключим из рассмотрения точки этих прямых и рассмотрим остальные точки. Для любой из оставшихся точек P очевидно, что если существует точка P' , то существует и $(P')'$, причем

$$(P')' = P.$$

Отметим, что у нашего отображения имеется 4 неподвижные точки – это центр I окружности, вписанной в треугольник ABC (т.е. $I' = I$), а также 3 центра вневписанных окружностей.

Теперь докажем, что, как правило, изогонально сопряженная точка существует, и окончательно уточним область определения изогонального сопряжения. В этом нам поможет следующая теорема.

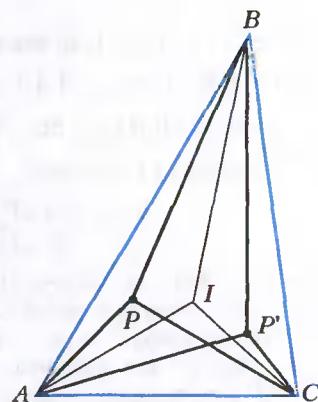


Рис 1

Теорема 1. Если точка P не лежит на сторонах треугольника или их продолжениях, то прямые, симметричные прямым AP , BP и CP относительно биссектрис соответствующих углов, либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Доказательство. Пусть AP , BP и CP пересекают прямые BC , AC и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 .

По теореме Чебы в форме синусов (см., например, статью «Теоремы Менелая и Чебы» в этом номере журнала),

$$\frac{\sin \angle CAA_1}{\sin \angle A_1AB} \cdot \frac{\sin \angle ABB_1}{\sin \angle B_1BC} \cdot \frac{\sin \angle BCC_1}{\sin \angle C_1CA} = 1. \quad (*)$$

Если прямые, симметричные AP , BP и CP относительно биссектрис соответствующих углов, пересекают соответствующие стороны треугольника или их продолжения в точках

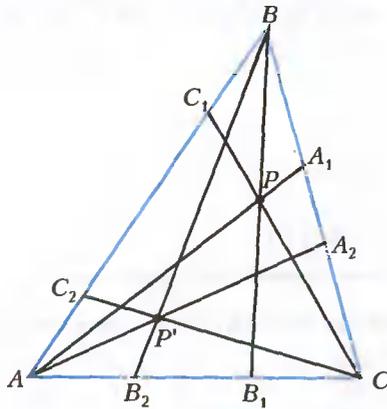


Рис. 2

A_2 , B_2 и C_2 (рис.2), то ввиду равенства углов

$$\begin{aligned} \angle CAA_1 &= \angle BAA_2, \quad \angle A_1AB = \angle A_2AC, \quad \angle ABB_1 = \angle CBB_2, \\ \angle B_1BC &= \angle B_2BA, \quad \angle BCC_1 = \angle ACC_2, \quad \angle C_1CA = \angle C_2CB \end{aligned}$$

из равенства (*) получим

$$\frac{\sin \angle BAA_2}{\sin \angle A_2AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_2}{\sin \angle B_2BA} \cdot \frac{\sin \angle ACC_2}{\sin \angle C_2CB} = 1.$$

Следовательно, по теореме Чебы, прямые AA_2 , BB_2 и CC_2 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Если эти прямые параллельны, то точки P' , сопряженной точке P , нет (впрочем, можно считать, что в этом случае сопряженной точкой будет бесконечно удаленная точка). Назовем такую точку P плохой.

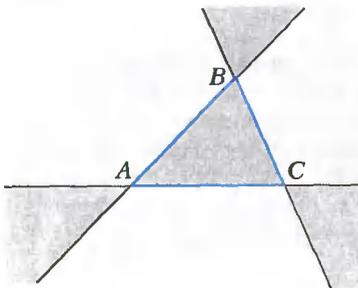


Рис. 3

Прежде всего, очевидно, что все точки, принадлежащие области, закрашенной на рисунке 3, не плохие. Пусть плохая точка P расположена так, как показано на рисунке 4. По определению точек B_1 и B_2 , а также C_1 и C_2 , углы B_2BA и PBC равны, также равны и углы PCB и C_2CB_2 . Если прямые BB_2 и CC_2 параллельны, то (обозначения см. на рис. 4)

$$\varphi + \angle B + \psi + \angle C = \pi,$$

т.е.

$$\varphi + \psi = \angle A, \text{ а } \angle BPC = \pi - \angle A,$$

а это значит, что точка P лежит на описанной около тре-

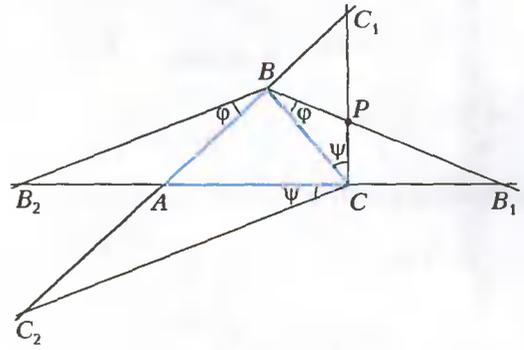


Рис. 4

угольника ABC окружности. Следовательно, все плохие точки лежат на описанной окружности.

Наоборот, если точка P принадлежит описанной окружности, то она плохая.

Упражнение 1. Докажите это.

Итак, изогональное сопряжение не определено тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности треугольника ABC . Точнее говоря, в этом случае изогонально сопряженная точка оказывается бесконечно удаленной, так как соответствующие прямые параллельны.

Отметим еще несколько важных свойств изогонального сопряжения.

1. Пусть A' , B' , C' – проекции точки P на прямые BC , CA , AB . Тогда перпендикуляры, опущенные из A на $B'C'$, из B на $C'A'$, из C на $A'B'$, пересекаются в точке P' , изогонально сопряженной P относительно треугольника ABC (рис. 5).

Упражнение 2. Докажите это свойство.

2. Если расстояния от P до сторон $\triangle ABC$ относятся как $x:y:z$, то расстояния от изогонально сопряженной точки P' до тех же сторон относятся как $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$. Докажем это.

Пусть x, y, z – расстояния от точки P до прямых BC , AB и AC соответственно, а x', y', z' – аналогичные расстояния от точки P' . Тогда

$$x' : y' : z' = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}.$$

Заметим (рис. 6), что

$$x = BP \sin \varphi, \quad x' = BP' \sin(\alpha + \varphi),$$

а

$$y = BP \sin(\alpha + \varphi), \quad y' = BP' \sin \varphi.$$

Перемножив равенства, получим, что $xx' = yy'$, а это и означает, что

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x}{y}.$$

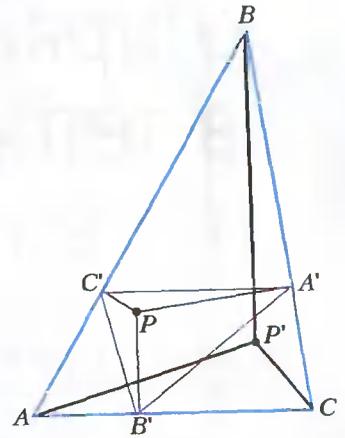


Рис. 5

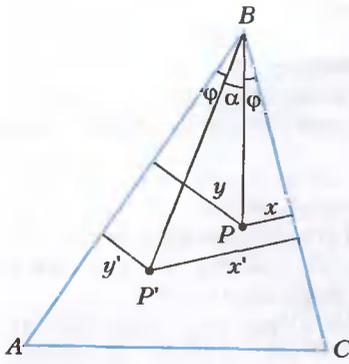


Рис. 6

Аналогично

$$\frac{x'}{z'} = \frac{x}{z}$$

Это свойство могло бы быть положено в основу определения изогонально-го сопряжения.

3. Центр O описанной окружности треугольника сопряжен с ортоцентром H этого треугольника.

Упражнение 3. Докажите

это свойство. *Указание.* Сначала докажите, что биссектриса угла треугольника делит пополам угол между радиусом описанной окружности и высотой, исходящими из той же вершины.

4. Центр тяжести M сопряжен точке, для которой сумма квадратов расстояний до сторон треугольника минимальна (эта точка L называется точкой Лемуана).

5. Точка, из которой все стороны треугольника видны под углами 120° (точка Торричелли; на рисунке 7 она обозначена буквой T), сопряжена точке, проекции которой на стороны треугольника образуют правильный треугольник (точка Аполлония; на рисунке 7 она обозначена через T').

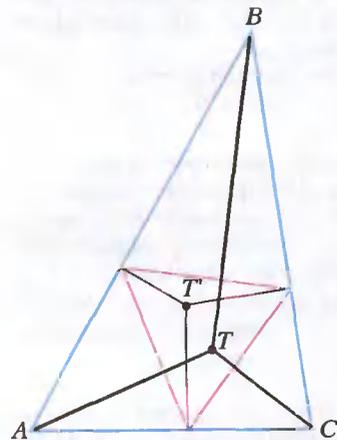


Рис. 7

Строго говоря, при таком определении точка Торричелли существует только в треугольнике, все углы которого меньше 120°. Можно изменить определение точки Торричелли так, чтобы данное свойство было верно для всех треугольников (см. статью «Теоремы Менелая и Чебы»).

Упражнение 4. Докажите свойства 4 и 5.

Изогональное сопряжение в гранях тетраэдра

В уже упомянутой нами статье «Описанная и вписанные сферы тетраэдра» было отмечено, что точки касания D₁ и D₂ грани ABC с вписанной и невписанной сферами тетраэдра ABCD изогонально сопряжены. Докажем это еще раз, пользуясь свойством 2 изогонального сопряжения.

Обозначим через ∠AB величину двугранного угла с ребром AB, а через I – центр вписанной сферы. Из рисунка 8 видно, что x, y, z – расстояния от точки D₁ до сторон BC, AC и AB – равны

$$x = r \operatorname{ctg} \frac{\angle BC}{2}$$

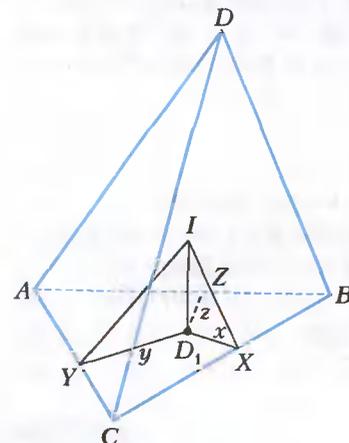


Рис. 8

$$y = r \operatorname{ctg} \frac{\angle AC}{2}, \quad z = r \operatorname{ctg} \frac{\angle AB}{2}$$

где r – радиус вписанной сферы, т.е.

$$x : y : z = \operatorname{ctg} \frac{\angle BC}{2} : \operatorname{ctg} \frac{\angle AC}{2} : \operatorname{ctg} \frac{\angle AB}{2}$$

Аналогично, расстояния x', y', z' от точки D₂ до сторон треугольника равны

$$x' = r_d \operatorname{tg} \frac{\angle BC}{2}, \quad y' = r_d \operatorname{tg} \frac{\angle AC}{2}, \quad z' = r_d \operatorname{tg} \frac{\angle AB}{2}$$

где r_d – радиус невписанной сферы, касающейся грани ABC, так что

$$x' : y' : z' = \operatorname{tg} \frac{\angle BC}{2} : \operatorname{tg} \frac{\angle AC}{2} : \operatorname{tg} \frac{\angle AB}{2}$$

А это значит, что

$$x' : y' : z' = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$$

и, по свойству 2, точки D₁ и D₂ изогонально сопряжены.

Но это не все! Рассмотрим точку касания плоскости ABC с невписанной сферой, касающейся грани ABD и продолжений остальных граней. Расстояния от этой точки до BC, CA и AB относятся как $\operatorname{ctg} \frac{\angle BC}{2} : \operatorname{ctg} \frac{\angle AC}{2} : \operatorname{tg} \frac{\angle AB}{2}$. Следовательно, для изогонально сопряженной точки эти расстояния относятся как $\operatorname{tg} \frac{\angle BC}{2} : \operatorname{tg} \frac{\angle AC}{2} : \operatorname{ctg} \frac{\angle AB}{2}$. Именно такое отношение получается для точки касания ABC со сферой, вписанной в «корытце», прилегающее к ребру CD (или AB). Таким образом, 8 точек касания плоскости ABC со сферами, касающимися плоскостей всех граней тетраэдра, разбиваются на 4 пары изогонально сопряженных.

Пойдем дальше. Как известно, если S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}, то ни в одно из «корытцев», прилегающих к ребрам AB и CD, нельзя вписать сферу. Это связано с тем, что точки касания сферы с плоскостями граней уходят в бесконечность. Но тогда по доказанному ранее изогонально сопряженные им точки лежат на описанных окружностях граней. Отсюда и из ранее доказанных утверждений вытекает теорема.

Теорема 2. Следующие условия равносильны.

а) Ни в одно из «корытцев», прилегающих к ребрам AB и CD, нельзя вписать сферу.

б) S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}.

в) ∠ACB + ∠ADB = ∠CAD + ∠CBD.

г) Точка касания плоскости ABC с невписанной сферой, касающейся грани ABD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ABC.

д) Точка касания плоскости ABD с невписанной сферой, касающейся грани ABC и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ABD.

е) Точка касания плоскости ACD с невписанной сферой, касающейся грани BCD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ACD.

ж) Точка касания плоскости BCD с невписанной сферой, касающейся грани ACD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около BCD.

Таким образом, мы практически бесплатно получили весьма эффектный результат. Чтобы лучше оценить его, попробуйте, например, непосредственно доказать равносильность условий б) и г).

Из теоремы 2 можно получить множество красивых следствий. Вот одно из них.

Если точки касания одной из невписанных сфер с плоскостями трех граней тетраэдра лежат на описанных окружностях этих граней, то аналогично верно и для трех других

внеписанных сфер, а сам тетраэдр при этом оказывается равногранным, так как все его грани – равные остроугольные треугольники. (О равногранных тетраэдрах можно прочесть в статье В.Матизена в «Кванте» № 7 за 1983 год или в Приложении к «Кванту» №1 за 1995 год.)

Пространственный аналог изогонального сопряжения

Определим теперь изогональное сопряжение в пространстве относительно тетраэдра $ABCD$. Сначала отметим следующий факт.

Теорема 3. Пусть дан тетраэдр $ABCD$ и точка P . Тогда 6 плоскостей, симметричных плоскостям ABP , ACP , BCP , ADP , BDP , CDP относительно биссекторных плоскостей соответствующих двугранных углов, пересекаются в одной точке.

Для доказательства достаточно заметить, что если расстояния от P до граней тетраэдра относятся как $a : b : c : d$, то каждая из рассматриваемых плоскостей проходит через точку, расстояния от которой до тех же граней относятся как

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} : \frac{1}{d}.$$

Определенную таким образом точку P' назовем изогонально сопряженной P относительно тетраэдра $ABCD$. Попутно мы доказали, что в пространстве остается верным аналог свойства 2. Более интересно, что сохраняется и свойство 1.

Теорема 4. Пусть A' , B' , C' , D' – проекция точки P на плоскости BCD , CDA , DAB , ABC . Тогда перпендикуляры, опущенные из A на $B'C'D'$, из B на $C'D'A'$, из C на $D'A'B'$, из D на $A'B'C'$, пересекаются в изогонально сопряженной P точке P' .

Доказательство. Прежде всего докажем следующий имеющий самостоятельную ценность факт.

Лемма. Пусть даны два тетраэдра $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Перпендикуляры, опущенные из A' на BCD , из B' на CDA , из C' на DAB , из D' на ABC , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда «антисоответственные» ребра этих тетраэдров (например, $A'B'$ и CD) перпендикулярны.

Доказательство леммы. Пусть P – точка пересечения перпендикуляров. Так как $PA' \perp BCD$ и $PB' \perp CDA$, $PA' \perp CD$ и $PB' \perp CD$. Следовательно, $CD \perp PA'B'$ и $CD \perp A'B'$.

Обратно, пусть «антисоответственные» ребра перпендику-

лярны. Тогда перпендикуляры из A' на BCD и из B' на ACD лежат в плоскости, проходящей через $A'B'$ и перпендикулярной CD , и, значит, пересекаются. Аналогично пересекаются два любых других перпендикуляра, и так как четыре перпендикуляра не лежат в одной плоскости, все они проходят через одну точку.

Из леммы сразу следует, что если перпендикуляры из вершин одного тетраэдра на грани другого пересекаются, то и перпендикуляры из вершин второго на грани первого тоже пересекаются. Поэтому осталось доказать, что в условиях теоремы точкой пересечения будет именно P' .

Плоскость $PC'D'$ перпендикулярна ребру AB . Поэтому если она пересекает это ребро в точке Q , то $C'QD'$ – линейный угол двугранного угла AB . Перпендикуляр, опущенный из A на $B'C'D'$, перпендикулярен $C'D'$, значит, линия пересечения плоскости π , проходящей через этот перпендикуляр и ребро AB , с плоскостью $C'D'X$ (см. рис.8) также перпендикулярна $C'D'$ по теореме о трех перпендикулярах. Отсюда и из свойства 1 плоского изогонального сопряжения следует, что π проходит через P' . Теорема доказана.

Очевидно, что, как и в плоском случае, центр вписанной сферы сопряжен с самим собой. Напротив, перестает быть верным утверждение о том, что точки описанной сферы тетраэдра не имеют сопряженных.

Нетрудно доказать также, что свойство 4 плоского сопряжения остается верным и в пространстве. Что касается свойства 3, то для произвольного тетраэдра оно не имеет смысла, так как высоты тетраэдра не всегда пересекаются в одной точке. Впрочем, оно неверно даже для тетраэдров, обладающих этим свойством (за исключением правильного тетраэдра).

Сложнее всего обстоит дело со свойством 5. Можно доказать следующий факт: если внутри тетраэдра есть точка T , из которой его противоположные ребра видны под равными углами, то проекции точки T' , изогонально ей сопряженной, на грани образуют равногранный тетраэдр. Следует отметить, что в этом случае точка T , как и точка Торричелли в треугольнике, минимизирует сумму расстояний до вершин тетраэдра. Критерий существования точки T – в любой вершине тетраэдра сумма двугранных углов меньше 2π или сумма косинусов плоских углов больше -1 . Можно ли определить аналог свойства 5 для тетраэдров, не удовлетворяющих этому критерию, неизвестно. Впрочем, это тема для отдельной статьи.

Заключительный этап конкурса «Математика 6–8»

(Начало см. на с. 27)

23. С помощью циркуля и линейки разделите произвольный треугольник на три треугольника, в каждом из которых можно выбрать по медиане так, что выбранные медианы равны.

А.Шаповалов

24. а) В начале игры есть 100 одинаковых квадратов. Каждым ходом игрок выбирает из имеющегося набора некоторые два прямоугольника, которые можно склеить по стороне в один прямоугольник, и склеивает их. Двое ходят по очереди. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто из игроков может победить при любой игре противника?

б) В начале игры есть 100 прямоугольников разме-

ром 1×2 . Двое ходят по очереди. Каждым ходом можно выбрать два прямоугольника с равной стороной и склеить их по этой стороне в один больший прямоугольник. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков может выиграть независимо от действий противника?

А.Шаповалов

25. У Васи есть сверхточная бензопила, которая умеет распиливать бревна в отношении $x : (1 - x)$ или $y : (1 - y)$ и ни в каком другом. Вася распилил бревно на 2 части. Одну из частей он снова распилил на две части. Затем он распилил одну из имеющихся трех частей. Оказалось, что среди полученных четырех бревен ровно три имеют одинаковую длину. Определите возможные значения x и y .

А.Чеботарёв

Публикацию подготовили А.Жуков, А.Спивак

Нестандартные конденсаторы

В.МОЖАЕВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССМОТРИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СХЕМЫ, в которых используются сложные конденсаторы – так условно называют нестандартные емкостные системы.

В случае обычного (стандартного) конденсатора мы имеем два изолированных проводника, на которые помещают равные по величине, но противоположные по знаку заряды. Коэффициент пропорциональности C между зарядом Q на этих проводниках и возникающей разностью потенциалов U называют емкостью (точнее – электрической емкостью) данного конденсатора: $Q = CU$. Емкость определяется размерами проводников, их взаимным расположением и диэлектрической проницаемостью среды, в которой они расположены. Для стандартных конденсаторов (плоский, сферический, цилиндрический) емкости известны, и их можно использовать при расчетах электрических цепей.

Однако, наличие вблизи конденсатора дополнительных проводников или внешних электрических полей может существенно изменить связь между зарядом и разностью потенциалов на данном стандартном конденсаторе. Поэтому в каждом таком случае необходимо проводить свой расчет, исходя из законов электростатики.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

Задача 1. Плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d подключен к источнику с постоянной ЭДС ξ (рис. 1). Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы в пространство между пластинами конденсатора ввести металлическую пластинку толщиной L ($L < d$)? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

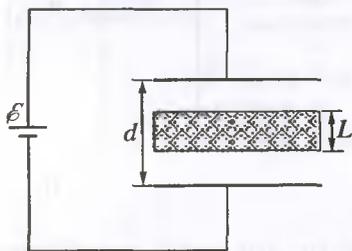


Рис. 1

подключенный к батарее с ЭДС ξ . Заряд этого конденсатора равен

$$Q_1 = C_1 \xi = \frac{\epsilon_0 S \xi}{d},$$

энергия конденсатора равна

$$W_1 = \frac{C_1 \xi^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S \xi^2}{2d}.$$

После введения металлической пластины в пространство между пластинами конденсатора емкость между исходными пластинами изменится. Найдем эту емкость.

Обозначим воздушный зазор между верхней пластиной конденсатора и верхней поверхностью введенной металлической пластины через x . Тогда наша система будет эквива-

лентна двум последовательно соединенным плоским конденсаторам с расстояниями между пластинами x и $d - L - x$ (рис. 2). Емкость такой системы, очевидно, равна

$$C_2 = \frac{\frac{\epsilon_0 S}{x} \frac{\epsilon_0 S}{d - L - x}}{\frac{\epsilon_0 S}{x} + \frac{\epsilon_0 S}{d - L - x}} = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{x}{d - L - x} + 1}.$$

Как видно из полученного выражения, емкость C_2 не зависит от x , т.е. от взаимного расположения проводящей пластины и обкладок конденсатора.

Новый заряд Q_2 на пластинах конденсатора после введения проводящей пластины будет

$$Q_2 = C_2 \xi = \frac{\epsilon_0 S \xi}{d - L},$$

а новая энергия заряженного конденсатора –

$$W_2 = \frac{C_2 \xi^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S \xi^2}{2(d - L)}.$$

По закону сохранения энергии, работа A_ξ , совершенная батареей, плюс механическая работа A , затраченная на введение пластины, пошли на изменение энергии конденсатора. Работа, совершенная батареей, очевидно, равна

$$A_\xi = \xi(Q_2 - Q_1) = \epsilon_0 S \xi^2 \left(\frac{1}{d - L} - \frac{1}{d} \right) = \frac{\epsilon_0 S \xi^2 L}{d(d - L)}.$$

Изменение энергии конденсатора составляет

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\epsilon_0 S \xi^2}{2(d - L)} - \frac{\epsilon_0 S \xi^2}{2d} = \frac{\epsilon_0 S \xi^2 L}{2d(d - L)}.$$

Тогда механическая работа, совершенная при введении пластины, будет равна

$$A = \Delta W - A_\xi = \frac{\epsilon_0 S \xi^2 L}{2d(d - L)} - \frac{\epsilon_0 S \xi^2 L}{d(d - L)} = -\frac{\epsilon_0 S \xi^2 L}{2d(d - L)}.$$

Полученный знак «минус» означает, что при введении пластины она будет втягиваться в конденсатор, а мы будем совершать отрицательную работу.

Задача 2. Батарея с ЭДС ξ подключена к удерживаемым неподвижно пластинам 1 и 3 плоского конденсатора (рис. 3). Площадь пластин S , расстояние между ними d . Посередине между этими пластинами расположена закрепленная неподвижно металлическая пластина 2, на которой находится заряд Q . Пластины 1 отпускают. Какую работу совершит батарея к моменту соударения пластин 1 и 2? Чему будет равна в этот момент кинетическая энергия пластины 1? Силой тяжести и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

В исходном состоянии мы можем рассматривать пластины 1 и 3 как обкладки плоского конденсатора с расстоянием между пластинами d . Наличие заряженной пластины 2 не сказывается на разности потенциалов между пластинами 1 и 3, поскольку пластина 2 расположена посередине между ними. Емкость системы пластин, очевидно, равна

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d},$$

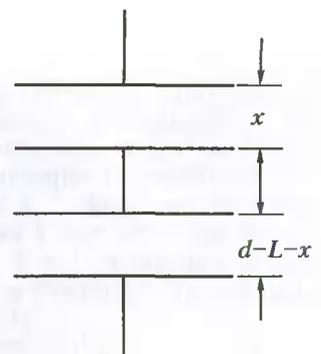


Рис. 2

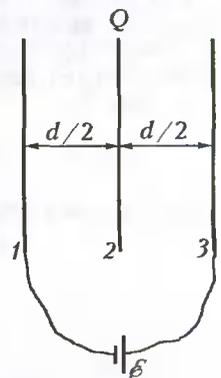


Рис. 3

а заряд на пластинах 1 и 3 равен

$$Q_1 = C\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{d}$$

После того как пластину 1 отпустили, она начнет двигаться по направлению к пластине 2. В те моменты, когда расстояние между пластинами 1 и 2 будет меньше $d/2$, мы уже не можем рассматривать пластины 1 и 3 как обычный плоский конденсатор — в этом случае электрическое поле заряженной пластины 2 влияет на разность потенциалов между пластинами 1 и 3. Заряд на пластинах 1 и 3 в момент, когда пластина 1 подлетит к пластине 2, найдем из условия сохранения разности потенциалов на пластинах 1 и 3 равной \mathcal{E} .

Пусть в этот момент заряд на пластине 1 равен $-Q_2$, а на пластине 3 он равен $+Q_2$ (рис.4), тогда

$$\mathcal{E} = \left(\frac{Q_2}{\epsilon_0 S} - \frac{Q}{2\epsilon_0 S} \right) \frac{d}{2}$$

Отсюда

$$Q_2 = \frac{2\epsilon_0 S \mathcal{E}}{d} + \frac{Q}{2}$$

Первый член в выражении для Q_2 соответствует тому заряду, который был бы на пластинах 1 и 3, если бы на пластине 2 отсутствовал заряд (тогда пластины 1 и 3 можно было бы рассматривать как плоский конденсатор), а второй член отражает влияние заряженной пластины 2. Изменение заряда на пластинах 1 и 3 к моменту соударения пластин 1 и 2 будет равно

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \frac{2\epsilon_0 S \mathcal{E}}{d} + \frac{Q}{2} - \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{d} = \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{d} + \frac{Q}{2}$$

За это время батарея совершит работу

$$A = \Delta Q \mathcal{E} = \mathcal{E} \left(\frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{d} + \frac{Q}{2} \right)$$

Сравним величину найденной работы с изменением энергии электрического поля, создаваемого всеми тремя пластинами. Обозначим энергию электрического поля в исходном состоянии через W_1 . Она включает в себя энергию электрического поля трех областей: I — область между пластинами 1 и 2 с объемом $V = Sd/2$, II — область между пластинами 2 и 3 с тем же объемом и III — область вне пластин 1 и 2. Напряженность электрического поля в области I является суперпозицией полей между пластинами 1 и 3 и полем пластины 2:

$$E_I = \frac{\mathcal{E}}{d} + \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$$

Энергия поля в этой области равна

$$W_I = \frac{\epsilon_0 E_I^2}{2} \cdot V = \frac{\epsilon_0 S d}{4} \left(\frac{\mathcal{E}}{d} + \frac{Q}{2\epsilon_0 S} \right)^2$$

Во второй области

$$E_{II} = \frac{\mathcal{E}}{d} - \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$$

$$W_{II} = \frac{\epsilon_0 S d}{4} \left(\frac{\mathcal{E}}{d} - \frac{Q}{2\epsilon_0 S} \right)^2$$

Энергию поля в третьей области обозначим через W_{III} . Полная энергия поля в исходном состоянии есть

$$W_1 = W_I + W_{II} + W_{III} = \frac{\epsilon_0 S d}{2} \left(\frac{\mathcal{E}^2}{d^2} + \frac{Q^2}{4\epsilon_0^2 S^2} \right) + W_{III}$$

Во втором случае, когда пластина 1 сталкивается с пластиной 2, мы рассмотрим те же три области. Мысленно выделим первую область, поле в ней создается только зарядом пластины 2, поэтому

$$E'_I = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$$

$$W'_I = \frac{\epsilon_0 E_I'^2}{2} \cdot S \frac{d}{2} = \frac{Q^2 d}{16\epsilon_0 S}$$

Во второй области

$$E'_{II} = \frac{\mathcal{E}}{d/2} = \frac{2\mathcal{E}}{d}$$

$$W'_{II} = \frac{\epsilon_0 E_{II}'^2}{2} S \frac{d}{2} = \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}^2}{d}$$

В третьей области электрическое поле такое же, как и в исходном состоянии ($W'_{III} = W_{III}$). Общая энергия поля во втором состоянии равна

$$W_2 = W'_I + W'_{II} + W'_{III} = \frac{Q^2 d}{16\epsilon_0 S} + \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}^2}{d} + W_{III}$$

Изменение энергии электрического поля за время сближения пластин 1 и 2 составляет

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}^2}{2d} - \frac{Q^2 d}{16\epsilon_0 S}$$

Если мы сравним работу A , совершенную батареей, с изменением энергии поля, то увидим, что $A > \Delta W$. Очевидно, что избыток работы перешел в кинетическую энергию, которую приобрела пластина 1. Эта энергия равна

$$W_k = A - \Delta W = \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}^2}{2d} + \frac{Q\mathcal{E}}{2} + \frac{Q^2 d}{16\epsilon_0 S}$$

Задача 3. Три тонкие незаряженные металлические пластины площадью S каждая расположены на расстоянии d друг от друга, причем d много меньше размеров пластин. К пластинам 2 и 3 подсоединили батарею с ЭДС \mathcal{E} (рис. 5). Пластины 1 сообщили заряд q_0 и замкнули ключ K . Определите заряд пластины 3 после замыкания ключа.

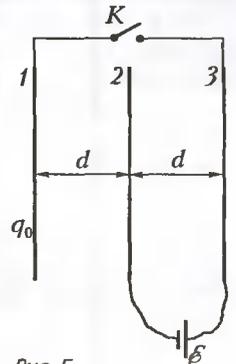


Рис 5

$$q_1 + q_2 + q_3 = q_0$$

Заряды каждой пластины создают между пластинами однородные электрические поля с напряженностями

$$E_1 = \frac{q_1}{2\epsilon_0 S}, \quad E_2 = \frac{q_2}{2\epsilon_0 S}, \quad E_3 = \frac{q_3}{2\epsilon_0 S}$$

Условие сохранения разности потенциалов между пластинами 2 и 3 равной \mathcal{E} можно записать в виде

$$\mathcal{E} = (-q_1 - q_2 + q_3) \frac{d}{2\epsilon_0 S}$$

Эквипотенциальность пластин 1 и 3 представим так:

$$(q_1 - q_3) \frac{d}{2\epsilon_0 S} = 0$$

Совместное решение системы полученных уравнений позволяет

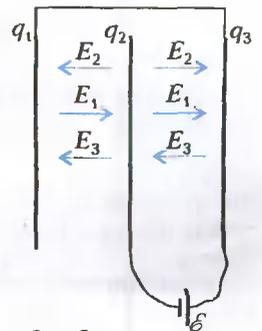


Рис 6

определить искомый заряд:

$$q_3 = \frac{q_0}{2} + \frac{\epsilon_0 S}{d} \epsilon.$$

Задача 4. Между двумя неподвижными плоскопараллельными незаряженными пластинами 1 и 2, закороченными через резистор сопротивлением R , помещают аналогичную проводящую пластину 3 с

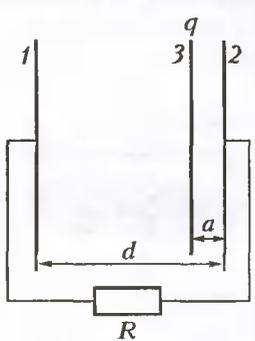


Рис 7

положительным зарядом q на расстоянии a от пластины 2, причем $a < d/2$, где d – расстояние между пластинами 1 и 2 (рис.7). После установления равновесного состояния пластину 3 быстро перемещают в симметричное положение – на расстоянии a от пластины 1. Полагая, что за время перемещения пластины 3 заряд на пластинах 1 и 2 не успевает измениться, определите величину и направление тока через резистор

сопротивлением R сразу после перемещения пластины 3, а также количество теплоты, выделившееся на резисторе после перемещения пластины. Площадь каждой пластины S , расстояние между пластинами мало по сравнению с линейными размерами пластин.

Рассмотрим электрические поля в пространствах между пластинами до перемещения пластины 3 (рис.8). Обозначим через E_0 величину напряженности электрического поля, создаваемого пластиной 3, а через E_1 – величину напряженности поля, создаваемого зарядами пластин 1 и 2. Запишем условие эквипотенциальности пластин 1 и 2 до перемещения пластины 3:

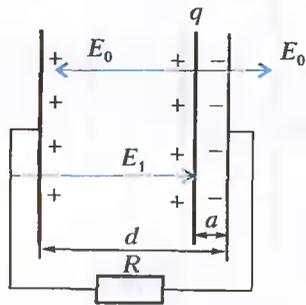


Рис 8

$$E_0(d-a) - E_0a - E_1d = 0,$$

откуда

$$E_1 = E_0 \left(1 - \frac{2a}{d}\right).$$

После быстрого перемещения пластины 3 между пластинами 1 и 2 возникает разность потенциалов (рис.9)

$$U_{12} = E_1d + E_0(d-a) - E_0a = 2E_0(d-2a)$$

(здесь была использована связь между E_1 и E_0). Поскольку

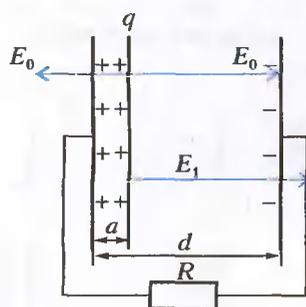


Рис 9

$$E_0 \frac{q}{2\epsilon_0 S},$$

то

$$U_{12} = \frac{q(d-2a)}{\epsilon_0 S}.$$

Возникшая разность потенциалов U_{12} приведет к появлению тока через резистор сопротивлением R :

$$I = \frac{U_{12}}{R} = \frac{q(d-2a)}{\epsilon_0 SR}.$$

Этот ток направлен от пластины 1 к пластине 2.

После перемещения пластины 3 будет происходить перезарядка пластин 1 и 2 до тех пор, пока они снова не станут эквипотенциальными. За это время в резисторе будет происходить выделение тепла. Поскольку начальная (до перемещения) и конечная энергии электрического поля системы

трех пластин равны, то суммарное количество теплоты, выделившееся на резисторе, будет равно работе, совершенной при перемещении пластины 3 в поле с величиной напряженности E_1 :

$$W_{\text{тепл}} = qE_1(d-2a) = \frac{q^2d}{2\epsilon_0 S} \left(1 - \frac{2a}{d}\right)^2.$$

Задача 5*. Четыре одинаковые металлические пластины расположены на равных расстояниях d друг от друга (рис.10). Площадь каждой пластины S . Пластины 1 и 3 подсоединены через ключ K к батарее с постоянной ЭДС ϵ , а пластины 2 и 4 закорочены через идеальную катушку с индуктивностью L . Ключ K замыкают. Определите заряды на пластинах в тот момент, когда ток через катушку будет максимален. Определите также величину этого тока. Расстояние d между пластинами мало по сравнению с их размерами.

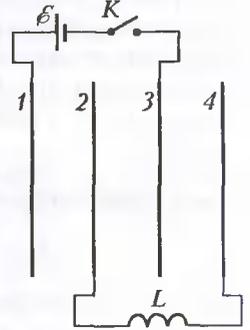


Рис 10

До замыкания ключа K все пластины не заряжены, а ток через катушку индуктивности равен нулю. После замыкания ключа на пластинах появятся заряды, и через катушку потечет ток.

Пусть в некоторый произвольный момент времени на пластинах 1 и 3 находится заряд q_1 , на пластинах 2 и 4 – заряд q_2 , а через катушку течет ток I . Знаки зарядов, направления электрических полей и направление тока указаны на рисунке 11. Закон Ома для цепи, содержащей батарею с ЭДС ϵ , запишем в виде

$$\epsilon = \frac{2q_1d}{\epsilon_0 S} - \frac{q_2d}{\epsilon_0 S}.$$

Аналогичный закон запишем для цепи, содержащей катушку индуктивности:

$$-L \frac{dI}{dt} = \frac{q_1d}{\epsilon_0 S} - \frac{2q_2d}{\epsilon_0 S}.$$

Из определения тока следует, что

$$I = -q_2'.$$

Полученная система трех уравнений позволяет составить уравнение относительно заряда q_2 :

$$q_2'' + \frac{3d}{2\epsilon_0 SL} q_2 = \frac{\epsilon}{2L}.$$

Общее решение этого уравнения выглядит так:

$$q_2(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{\epsilon_0 S \epsilon}{3d}, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{3d}{2\epsilon_0 SL}}.$$

Используя начальные условия $q_2(0) = 0$ и $q_2'(0) = 0$, получим

$$A = 0, B = -\frac{\epsilon_0 S \epsilon}{3d}.$$

Окончательно зависимость заряда от времени будет иметь вид

$$q_2(t) = \frac{\epsilon_0 S \epsilon}{3d} (1 - \cos \omega t).$$

Подставляя это выражение в самое первое уравнение, найдем

$$q_1(t) = \frac{\epsilon_0 S \epsilon}{6d} (4 - \cos \omega t).$$

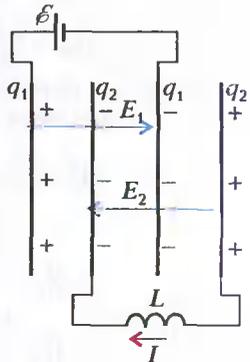


Рис 11

Обратим внимание на полученную зависимость $q_1(t)$. При $t = 0$ (в момент замыкания ключа)

$$q_1(0) = \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{2d}$$

Это означает, что сразу после замыкания ключа на пластинах 1 и 3 возникает заряд, который равен заряду конденсатора, образованного пластинами 1 и 3 и заряженного до напряжения, равного ЭДС батареи \mathcal{E} . Такая быстрая зарядка соответствует протеканию бесконечно большого тока. Эта особенность возникла из-за идеализации нашей цепи: отсутствие в ней сопротивления. Неизбежная потеря энергии при зарядке конденсатора (теряется столько, сколько запасается в конденсаторе) в данном случае будет реализована в виде излучения.

Используя соотношение между током и зарядом, мы можем найти зависимость тока I от времени:

$$I(t) = -q'_2 = -\frac{\epsilon_0 S \mathcal{E} \omega}{3d} \sin \omega t$$

Максимальные значения ток будет принимать при условии

$$\omega t_{\max} = \frac{\pi}{2} + \pi m, \text{ где } m = 0, 1, 2, \dots$$

Величина максимального тока будет равна

$$I_{\max} = \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{3d} \sqrt{\frac{3d}{2\epsilon_0 S L}} = \mathcal{E} \sqrt{\frac{\epsilon_0 S}{6dL}}$$

В моменты максимального тока заряды будут максимальными и равными

$$q_{1m} = \frac{2\epsilon_0 S \mathcal{E}}{3d} \text{ на пластинах 1 и 3,}$$

$$q_{2m} = \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{3d} \text{ на пластинах 2 и 4.}$$

Заряды на пластинах можно найти и другим способом: используя эквивалентную схему. При максимальном токе через катушку ЭДС индукции равна нулю, и пластины 2 и 4 оказываются закороченными (разность потенциалов между ними равна нулю). Эквивалентная схема для этого момента изображена на рисунке 12. Реальные пластины 2 и 3 в эквивалентной схеме представлены двумя парами пластин: $2_1, 2_2$ и $3_1, 3_2$. Емкости всех трех конденсаторов равны между собой и составляют

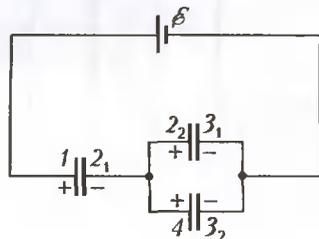


Рис. 12

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Емкость всей системы конденсаторов, очевидно, равна

$$C_{\text{общ}} = \frac{2}{3} C = \frac{2\epsilon_0 S}{3d}$$

Заряд на пластине 1 будет равен

$$q_{1m} = \frac{2\epsilon_0 S \mathcal{E}}{3d}$$

Суммарный заряд на пластинах 3_1 и 3_2 составит

$$q_{3m} = -\frac{2\epsilon_0 S \mathcal{E}}{3d},$$

а на каждой из этих пластин – по $-\frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{3d}$. На четвертой пластине появится заряд

$$q_{4m} = \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{3d}$$

Заряд на второй пластине будет равен алгебраической сумме зарядов на пластинах 2_1 и 2_2 :

$$q_{2m} = -\frac{2\epsilon_0 S \mathcal{E}}{3d} + \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{3d} = -\frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}}{3d}$$

Упражнения

1. В плоском конденсаторе с площадью пластин S и расстоянием между пластинами d расположена металлическая пластина толщиной L_1 (рис. 13). Конденсатор подключен к источнику с постоянной ЭДС \mathcal{E} . Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы передвинуть верхнюю обкладку конденсатора на расстояние L_2 ? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

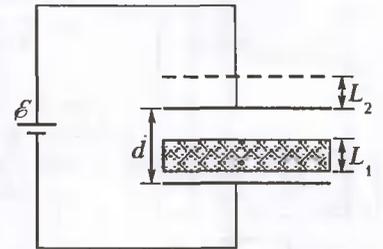


Рис. 13

2. К неподвижным пластинам 1 и 2 плоского конденсатора подключена батарея с ЭДС \mathcal{E} (рис. 14). К пластине 1 прижата проводящая пластина 3. Пластины 3 отпускают, и она начинает двигаться к пластине 2. Какую работу совершит батарея за время перемещения пластины 3 от пластины 1 к пластине 2, если площадь каждой пластины S , а начальное расстояние между пластинами 2 и 3 равно d ? Силой тяжести пренебречь.

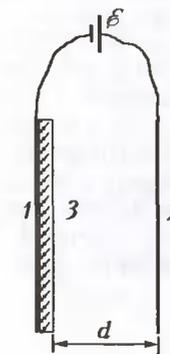


Рис. 14

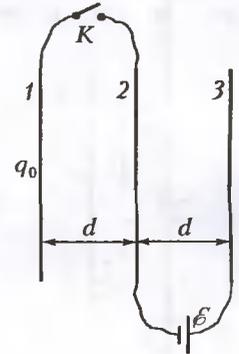


Рис. 15

3. Три тонкие незаряженные металлические пластины, площадью S каждая, расположены на расстояниях d друг от друга, причем d много меньше размеров пластин (рис. 15). К пластинам 2 и 3 подсоединили батарею с ЭДС \mathcal{E} . Пластина 1 сообщила заряд q_0 и замкнули ключ K . Определите заряд пластины 3 после замыкания ключа.

4. Между двумя проводящими плоскопараллельными незаряженными пластинами 1 и 2, закороченными через резистор сопротивлением R , помещают пластину 3 с отрицательным зарядом $-q$ на расстоянии a от пластины 2, причем $a < d/2$, где d – расстояние между пластинами 1 и 2 (рис. 16). После того как система пришла в стационарное состояние, пластину 1 быстро перемещают на расстояние a по направлению к неподвижным пластинам 2 и 3. Полагая, что за время перемещения пластины 1 заряд на пластинах 1 и 2 не успевает измениться, определите, какая работа была совершена при перемещении пластины, а также величину и направление тока через резистор сразу после перемещения пластины 1. Площадь пластин S .

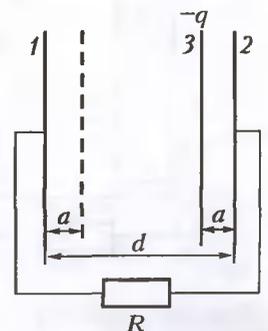


Рис. 16

XII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» с 10 по 17 октября 2003 года провел традиционную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон» в одном из ведущих научных центров Российской академии наук – в городе Пущино Московской области. Олимпиада проходила при участии Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Государственного научного центра РФ «Пущино» и при поддержке компаний «Кирилл и Мефодий» и «Физикон», а также Издательского дома «Первое сентября» и журнала «Квант».

На олимпиаду съехались 157 участников из различных регионов России, из Казахстана и Норвегии. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике и истории научных идей и открытий. Впервые на олимпиаду приехали и школьники, интересующиеся биологией, экологией, историей, философией и культурологией.

По традиции олимпиады, на церемонии открытия после приветствий организаторов и представления команд-участников выступили ведущие ученые Научного центра «Пущино» с докладами об актуальных и интересных проблемах биологии, генетики и астрофизики. День открытия завершился устными командными соревнованиями по истории научных идей и открытий. Следующие рабочие дни олимпиады были насыщены напряженной индивидуальной и командной работой над заданиями олимпиады по математике и физике, а в промежутках были организованы посещения научных институтов и лабораторий.

Заключительной частью олимпиады стала церемония закрытия, где организаторы и члены жюри поблагодарили участников за интересную совместную работу, высказали теплые слова всем, кто помогал в организации и проведении этой олимпиады. Особо было отмечено участие компании «Кирилл и Мефодий» как генерального спонсора, представившего наградной и призовой фонды победителям и участникам олимпиады.

Лучшие из лучших в индивидуальных и командных зачетах во всех номинациях были награждены дипломами, медалями, кубками и памятными сувенирами олимпиады.

Абсолютным победителем олимпиады в командном зачете стала сборная команда Краснодарского края. Ей был вручен главный приз соревнования – переходящий суперкубок, а также диплом и призы от спонсоров олимпиады. Эта команда была также лучшей (завоевала первое место) в турах по физике и истории научных идей и открытий, ей вручили два малых кубка за эти достижения. Второе место заняла дружная и традиционно сильная команда Классического лицея 1 при РГУ (Ростов-на-Дону). Она также была второй в турах по физике и истории научных идей и открытий. На третье место вышла сборная команда города Уфы (лицей 42 и школа 60), которая была второй по математике и третьей по истории научных идей и открытий. Жюри отметило также команду Регионального центра МИК «Глюон» (г. Тольятти), победившую в устных соревнованиях по математике. Ей был вручен памятный малый кубок олимпиады. Специальным призом была отмечена команда Норвегии (Skedsmo Videregående Skole) за волю к победе.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады (в общем зачете) стал Бледных Дмитрий, ученик 11

класса школы 10 города Тольятти. Ему была вручена большая золотая медаль и малая золотая медаль за первое место по математике. Вторым призером в общем зачете стал Бурангулов Павел, ученик 11 класса лицея 42 города Уфы. Ему вручена большая серебряная медаль и малая бронзовая медаль за третье место по математике. Большую бронзовую медаль в общем зачете завоевал Захаров Максим, ученик 9 класса Центра образования 18 города Йошкар-Ола. Он получил также малую серебряную медаль за второе место по математике.

Лучшим в индивидуальном зачете по физике стал Лесничий Яков, ученик 11 класса школы 3 города Кропоткин (Краснодарский кр.), ему вручена малая золотая медаль. Серебряная медаль по физике досталась Михайлову Алексею, ученику 11 класса школы 1 города Славянск-на-Кубани. Третьим в этом зачете стал Юрьев Никита, ученик 11 класса Классического лицея 1 при РГУ.

Победители в эколого-биологической и историко-философской (культурологической) части олимпиады были награждены памятными знаками и дипломами олимпиады «Интеллектуальный марафон-2003».

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XIII Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2004 года.

Заявки на участие присылайте по адресу:

115522 Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп.2, МИК «Глюон».

Телефоны: (095)517-8014, 324-2040,

факс: (095)396-8227,

e-mail: gluon@yandex.ru

(для информации см. также сайт:

www.informika.ru/text/goscom/gluon).

Задачи олимпиады

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. Запишите в виде несократимой дроби число

$$\frac{1010111110101}{1100111110011}$$

2. На продолжении биссектрисы угла C треугольника ABC за точку C взяли такую точку D , что $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle C$. Найдите CD , если $BC = a$, $AC = b$.

3. Решите уравнение

$$x^2(1+x^2)^2 + y^2(1+y^2)^2 = 8x^2y^2.$$

4. При каких натуральных n число а) $5^n + 4^n$; б) $5^n - 4^n$ является полным квадратом?

5. Три равные окружности проходят через точку H . Пусть A , B , C – вторые точки пересечения этих окружностей. Найдите угол BAC , если $AH = BC$.

6. Депутат Госдумы по возвращении с Канарских островов, где он был в командировке, узнал, что его избрали

председателем комитета Госдумы, причем за него было подано больше 68, но меньше 69 процентов голосов. Какое наименьшее количество депутатов могло участвовать в голосовании?

7. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ – некоторые числа, причем

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

а) Можно ли вписать в клетки пустой таблицы $m \times n$ не более $m + n - 1$ чисел так, чтобы суммы чисел в строках были равны a_1, a_2, \dots, a_m , а в столбцах b_1, b_2, \dots, b_n соответственно?

б) Тот же вопрос, если все числа $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ положительные, а вписывать в таблицу следует неотрицательные числа.

ФИЗИКА

1. Оказалось, что температура воздуха в Пушкино в безветренный пасмурный день может быть описана зависимостью T (°C) = $20 + 10 \cos(2\pi t/24 + \varphi)$, где t – время в часах, φ – постоянная. Определите, когда достигается максимальная температура воды, равная 25 °C, в небольшом пруду, расположенном недалеко от пансионата «Пушкино». Температура воздуха максимальна в 15.00 часов.

2. Даны две пружины из одинакового материала, свитые виток к витку. Диаметры витков пружин 3 мм и 9 мм, их длины 1 см и 7 см, диаметры проволок 0,1 мм и 0,3 мм. Чему равна жесткость второй пружины, если жесткость первой 14 Н/м?

3. Груз массой m начинает соскальзывать с вершины гладкой полусферы массой m и радиусом R , лежащей на гладкой горизонтальной плоскости. На какой высоте груз оторвется от полусферы?

4. В сосуде, окруженном вакуумом, находится смесь равных масс водорода и кислорода. Каков будет состав молекулярного пучка, вытекающего из сосуда через очень маленькое отверстие?

5. Заряд q равномерно распределен по поверхности полусферы радиусом R . Чему равен потенциал в точках, расположенных посередине между центром сферы и ее краем?

6. В течение какого промежутка времени может поддерживаться непрерывная радиосвязь между спутниками, если она возможна лишь при условии прямой видимости? Орбиты спутников лежат в одной плоскости на высоте 50 км и 100 км. Рассмотрите случаи, когда спутники движутся в одном направлении или навстречу друг другу.

7. В результате теплового излучения масса Солнца каждую секунду уменьшается на 4,3 млн тонн. Как в результате этого эффекта изменится радиус орбиты Земли: а) за 1 год; б) за 1 млрд лет? В настоящее время масса Солнца $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ кг, радиус орбиты Земли $R = 1,5 \cdot 10^{11}$ м.

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. Группа туристов вышла из лагеря в 11 часов утра. В 11.30 один из туристов вспомнил, что он оставил в лагере компас, и побежал назад в лагерь. Взяв компас, он тут же побежал обратно и догнал группу в 13 часов. В котором часу он прибежал в лагерь?

2. Можно ли разрезать произвольный выпуклый n -угольник на равнобедренные треугольники?

3. Вычислите $\sqrt{2003^2 + 2003^2 \cdot 2004^2 + 2004^2}$.

4. Существуют ли две трапеции такие, что боковые стороны каждой из них равны основаниям другой?

5. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, больших 1.

6. Можно ли из полосок $1 \times 1, 1 \times 3, 1 \times 5, \dots, 1 \times 2003$ сложить прямоугольник, каждая сторона которого больше 1?

7. Разделите угол $\pi/7$ на три равные части циркулем и линейкой.

8. Отец и сын катались по кругу на катке. Время от времени отец обгонял сына. Когда сын стал бегать в противоположном направлении, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бежит быстрее сына?

9. На дне рождения доктор Ватсон угощал гостей треугольным тортом, который он разрезал по биссектрисам углов на 6 частей. Холмсу достался кусок в виде прямоугольного треугольника, после чего Холмс заявил, что кому-то еще из гостей тоже достался кусок в форме прямоугольного треугольника. Прав ли Холмс?

10. Сумма нескольких положительных чисел равна сумме их квадратов. Что больше: сумма четвертых степеней этих чисел или сумма их кубов?

ФИЗИКА

1. Рыбак, живший около устья впадающей в океан реки, перебрался на новое место жительства на несколько километров выше по течению. Там он с удивлением обнаружил, что время между началом прилива и началом отлива уменьшилось. Почему?

2. Что произойдет раньше (рис. 1): левый груз ударится о стенку или правый груз ударится о блок? Трением пренебречь.

3. В одном случае к потолку подвешивают цепочку длиной L , закрепив ее концы на расстоянии меньшем L , а в другом случае к этим же точкам подвешивают два стержня длиной $L/2$ каждый, соединив их другие концы (рис. 2). В каком случае центр тяжести будет выше?

4. Космический корабль опустился на пару часов для установки радиомаяка на астероид со средней плотностью $2,5 \text{ г/см}^3$. Оцените, при каком диаметре астероида космонавты смогут объехать его на вездеходе за время стоянки.

5. Левый клин медленно вдвигают под правый (рис. 3). Каким должен быть угол β , чтобы правый клин перевернулся?

6. Аристотель тщательно взвешивал пустой кожаный мешок и тот же мешок, но заполненный воздухом. Показания весов были одинаковыми. Почему же его вывод о невесомости воздуха был неверен?

7. Вертикальный цилиндрический сосуд массой m стоит на подставке. Объем цилиндра делится на две части горизонтальным поршнем массой $2m$, который может перемещаться без трения. Подставку мгновенно убирают. Чему равны в первый момент ускорения сосуда и поршня?

8. Кусок льда всплывает с глубины 500 м. Оцените, какая часть льда при этом растает. Температура воды и льда 0 °C. Удельная теплота плавления льда $3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$.

9. Трехлитровую банку с водой пытаются вскипятить кипятильником мощностью 300 Вт, но удается нагреть воду

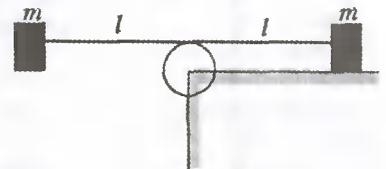


Рис. 1



Рис. 2

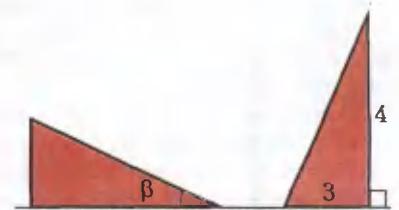


Рис. 3

только до 70 °С. За сколько секунд вода остынет на 2 градуса после выключения кипятильника?

10. Потенциал в вершине кубика, заряженного равномерно по объему, равен 12 В. Чему равен потенциал в центре кубика?

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. В 2003 году математическая общественность всего мира отметила 100-летие со дня рождения великого российского математика, академика А.Н. Колмогорова (1903–1987). Он был не только выдающимся ученым, но и педагогом, автором многих учебников, книг и статей для школьников и учителей.

Что вы знаете о научной и педагогической деятельности А.Н. Колмогорова?

2. Николай Коперник (1473–1543), создавая свою гелиоцентрическую систему мира, изучал сложные движения тел. В частности, он рассмотрел и решил следующую задачу:

Окружность ω радиуса 1, касающаяся изнутри неподвижной окружности радиуса 2, катится без скольжения по внешней окружности. По каким траекториям будут при этом двигаться точки окружности ω ?

Решите эту задачу и вы.

3. По праву считающийся одним из создателей теории чисел, П. Ферма (1601–1665) полностью решил задачу о том, какие натуральные числа представляются в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Для этого ему, в частности, понадобилось следующее утверждение: если числа m и n представимы в виде суммы двух квадратов, то и mn тоже представимо в таком виде. Докажите это.

4. Один из замечательных математиков древности Аполлоний Пергский (3–2 в. до н.э.) доказал, что геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно и не равно единице, является некоторая окружность (она называется окружностью Аполлония). Докажите, что, в частности, все точки M , такие что $MA / MB = 2$, где $AB = 3$, лежат на некоторой окружности. Найдите центр и радиус этой окружности.

5. Леонард Эйлер (1707–1783) доказал в 1752 году теорему, которая считается первой в истории науки теоремой одного из самых глубоких разделов математики – топологии. Теорема Эйлера гласит, что число вершин V , число ребер P и число граней G произвольного выпуклого многогранника удовлетворяют равенству $V - P + G = 2$.

Пользуясь теоремой Эйлера, докажите, что всякий выпуклый многогранник имеет либо треугольную грань, либо трехгранный угол (т.е. либо в какой-то вершине сходятся ровно 3 ребра, либо среди граней найдется треугольник).

Подсказка: предположив противное, оцените двумя способами число ребер.

ФИЗИКА

1. Самым сильным научным аргументом против коперниканской системы в XVI веке был следующий. Поскольку все планеты обращаются вокруг Солнца, а радиус орбиты Венеры составляет 0,7 радиуса орбиты Земли, отношение максимального расстояния от Венеры до Земли к минимальному должно составлять $(1 + 0,7) : (1 - 0,7) \approx 6$. Следовательно, блеск Венеры должен меняться в $6^2 = 36$ раз. Однако реально блеск Венеры в течение всего времени наблюдения меняется не более чем в 2–3 раза. Значит, отношение максимального и минимального расстояний не может быть таким, как это утверждается в гелиоцентрической системе, и она неверна. Это рассуждение ставило коперниканцев в тупик, и они не могли дать ответ вплоть до начала проведения телескопических наблюдений.

1) Объясните, в чем ошибка приведенного аргумента.

2) Какую роль в опровержении этого аргумента сыграли телескопические наблюдения?

2. 1) За что и кому была присуждена Нобелевская премия по физике 2003 года?

2) Какие еще Нобелевские премии были присуждены за изучение этих явлений?

3. При появлении новых направлений в архитектуре во второй половине XIX века потребовалось много дешевого и большого по размерам оконного стекла. Для быстрого решения новых инженерных задач стекольной промышленности фирмы по производству оконного стекла спонсировали ряд физических лабораторий с целью создания приборов по измерению высоких температур. У этих лабораторий были и другие заказчики – фирмы, разрабатывающие конверторную выплавку стали.

1) В чем заключались особенности этих заказов?

2) Какие опытные физические законы и кем были открыты в связи с работами по выполнению заказов?

3) В чем заключались революционные изменения, внесенные в науку при теоретическом объяснении этих законов?

4) Кем и когда были сделаны эти революционные изменения?

4. 24 марта 1896 года в Петербурге А.С. Поповым была передана первая в мире радиограмма (на расстояние 250 м). В этом же году патент на применение электромагнитных волн для беспроводной связи получил итальянский инженер Г.Маркони.

1) Каков был текст (2 слова) первой в мире радиограммы?

2) В каком году Маркони осуществил радиосвязь через Атлантический океан?

3) Почему короткие радиоволны распространяются на большие расстояния лучше, чем длинные?

4) Для передачи сообщений на очень коротких радиоволнах в настоящее время используются геостационарные спутники. Оцените время между передачей сигнала и его приемом на Земле (без учета задержки сигнала в радиоусилительных устройствах).

5. В 1964 году М.Гелл-Манн и Дж.Цвейг независимо друг от друга выдвинули гипотезу о фундаментальных частицах, из которых «построены» барионы, в частности протоны и нейтроны. Одна из особенностей этих частиц состоит в том, что их электрический заряд составляет либо одну треть элементарного электрического заряда (отрицательного), либо две трети этого заряда (положительного). Цвейг предложил для названия этих частиц термин игральные карты: «тузы», т.е. самые главные частицы. Однако физическому сообществу ученых пришлось по душе другое название, предложенное Гелл-Манном.

1) Как называются сейчас эти частицы?

2) Как это название связано с художественной литературой XX века (писатель, произведение, персонажи)?

3) Если одна из этих частиц (d) имеет электрический заряд $-1/3$ элементарного заряда, а другая (u) $+2/3$ элементарного заряда, то какова структура протона и нейтрона? Каждый барион содержит три частицы типа u или d .

4) Сколько всего, по современным представлениям, существует таких элементарных частиц, как u и d ?

5) Почему по отношению к этим частицам применим термин «конфайнмент», т.е. «тюремное заключение»?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, Ж.Работ, А.Чернуцан

Международная физическая олимпиада «Туймаада»

С 10 по 18 июля в столице Республики Саха (Якутия) городе Якутске прошла X Международная олимпиада школьников по математике, физике, химии и информатике «Туймаада-2003». В этом году в олимпиаде приняли участие представители Румынии, Болгарии, Южной Кореи, Германии, России и наблюдатели из Англии.

Олимпиада по физике состояла из двух лиг — первой и высшей. В первой лиге могли участвовать девятиклассники, в высшей — десятиклассники и одиннадцатиклассники. Олимпиада проходила в два дня. В первый день участникам были предложены четыре теоретические задачи, во второй — одна экспериментальная.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура и список победителей олимпиады.

По вопросам проведения олимпиады можно обращаться по электронным адресам:

grigyum@sitc.ru (Григорьев Юрий Михайлович),

murtuy@pochta.ru (Муравьев Вячеслав Михайлович).

Теоретический тур

ПЕРВАЯ ЛИГА

Задача 1. Сопротивление

В доску вбиты шесть гвоздей, образующие вершины правильного шестиугольника. Все гвозди попарно соединены резисторами сопротивлением 100 Ом каждый. Найдите сопротивление между двумя соседними гвоздями.

В. Муравьев

Задача 2. Конус

Конус с диаметром основания D и высотой H погружен в воду. Ось конуса составляет с поверхностью жидкости угол α , расстояние от поверхности жидкости до центра основания конуса h (рис. 1). Найдите силу, действующую на боковую поверхность конуса, если плотность жидкости ρ . *Примечание:* вы можете в случае

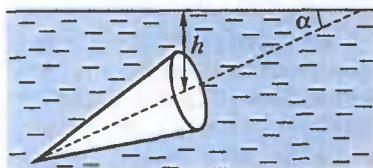


Рис. 1

необходимости воспользоваться формулой для объема конуса $V = \frac{SH}{3}$, где S — площадь основания конуса, а H — высота конуса.

В. Муравьев

Задача 3. Дерево «Маа»

На планете «Туй» растет дерево «Маа», семенами которого питается животное «Да». Особенность дерева «Маа» состоит в том, что при созревании его плоды лопаются и выбрасывают семена по всем направлениям со скоростью v_0 . Плоды созревают на дереве на одном и том же месте, находясь на высоте H над землей. Животное в процессе эволюции освоило следующий способ добывания пищи: оно садится на расстоянии L от дерева и, дождавшись, когда плод лопнет, в тот же момент выбрасывает со скоростью v язык, который состоит из тонкой легкой нити и находящегося на ее конце тяжелого шарика. Из шарика в определенный момент во все

стороны выбрасываются липкие щупальца, которые ловят все семена, находящиеся от центра шарика на расстоянии меньше длины щупальца. Найдите минимальную длину щупальца, достаточную для того, чтобы животное захватывало все семена. Под каким углом к горизонту должно животное выбрасывать язык и какое устанавливать время задержки между выбрасыванием языка и распусканьем щупалец, чтобы достаточная длина щупальца была минимальной? Считать, что во время полета шарика с липучками нить на него не действует. Ускорение свободного падения на поверхности планеты «Туй» равно g .

В. Вавилов

Задача 4. Скрепка

Легкая нерастяжимая нить длиной $2L = 2$ м удерживается за концы так, что они находятся на одной высоте рядом друг с другом. На нити висит кусочек проволоки массой $M = 1$ г, изогнутый в виде перевернутой буквы U (напоминает скрепку). Нить выдерживает максимальную растягивающую силу $F = 5$ Н ($F \gg Mg$). Концы нити начинают перемещать в противоположных горизонтальных направлениях с одинаковыми скоростями $v = 1$ м/с. В какой-то момент нить не выдерживает и рвется. На какую максимальную высоту от своего положения в момент разрыва нити взлетит кусочек проволоки? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

С. Варламов

ВЫСШАЯ ЛИГА

Задача 1. Цепочка

В задаче вам предстоит иметь дело с электрическими цепочками с большим количеством звеньев, но не бесконечным.

а) Рассмотрим цепь, изображенную на рисунке 2. Найдите ток, протекающий через крайний правый резистор сопротивлением 3 Ом.

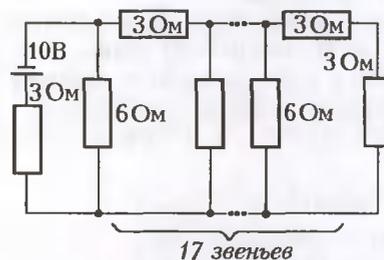


Рис. 2

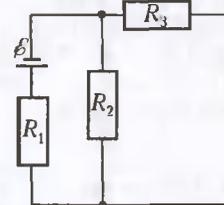


Рис. 3

б) Известно, что любую схему с двумя выводами, содержащую только источники и резисторы, можно представить в виде источника с каким-то внутренним сопротивлением. Представьте в таком виде схему, изображенную на рисунке 3.

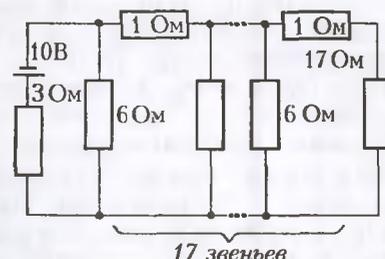


Рис. 4

с) В схеме, показанной на рисунке 4, найдите ток через резистор сопротивлением 17 Ом.

А.Имамбеков

Задача 2. Волны

В задаче предлагается рассмотреть распространение волн, создаваемых небольшим пароходом в реке небольшой глубины с неплоским дном.

а) Матросами дважды были проделаны измерения глубины под ними – один раз с помощью жесткого шеста, а второй раз с помощью эхолота, в котором использовался узко сфокусированный пучок, направленный вертикально вниз. Измерения с помощью шеста показали, что глубина дна под ними 20 м, причем, поскольку корабль слегка двигался из стороны в сторону, матросы смогли также определить, что угол наклона дна к горизонту прямо под кораблем составляет 60°. А измерения глубины с помощью эхолота показали результат 25 м. Предполагая, что дно состоит из двух наклонных склонов, определите максимальную глубину реки и угол наклона второго склона к горизонту. Дно считать идеально гладким. Корабль плывет параллельно берегам.

б) Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в сосуде с небольшой глубиной h (настолько небольшой, что в колебаниях принимает участие вся жидкость, вплоть до дна), заполненном несжимаемой жидкостью. Вам предлагается найти скорость распространения этой волны, зная, что скорость распространения продольных волн в газе можно

вычислить по формуле $v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, где p – давление в газе, а

ρ – его плотность. *Указание:* рассмотрите тонкий вертикальный слой жидкости в сосуде и найдите повышение давления, вызванное изменением его толщины.

с) Рассмотрим дно, профиль которого показан на рисунке 5. Предположим, что посередине реки плывет вдоль берегов

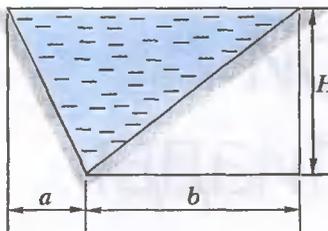


Рис. 5

небольшой пароход со скоростью u . Вам предлагается определить, какую форму ($y(x)$, где ось y направлена перпендикулярно берегу, а ось x – по курсу парохода) будет иметь фронт создаваемой им волны, считая, что скорость звука в воде пропорциональна корню квадрат-

ному из глубины, т.е. $v = \sqrt{gh}$, где g – ускорение свободного падения, а h – глубина, до тех пор, пока глубина такова, что $v > v_0$, а при меньшей глубине $v = v_0$, где v_0 – некоторая скорость, обусловленная капиллярными эффектами.

В.Вавилов

Задача 3. Фотонный газ

В задаче предлагается рассмотреть некоторые свойства фотонного газа.

а) Докажите, на основании молекулярно-кинетической теории идеальных газов, что давление, оказываемое газом на некую плоскую поверхность, задается формулой $P = \frac{1}{3} n \langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle$, где P – давление газа, n – концентрация молекул газа, \vec{v} – скорость молекулы и \vec{p} – импульс молекулы.

б) Предположим теперь, что молекулами газа являются фотоны, для которых $v = c$, где c – скорость света. Покажите, что давление фотонного газа задается формулой $P = \frac{1}{3} u$, где u – объемная плотность энергии фотонного газа.

с) Рассматривая бесконечно малый цикл Карно, покажите, что давление пропорционально четвертой степени абсолютной температуры.

д) Используя результаты предыдущего пункта, получите закон Стефана–Больцмана для мощности излучения абсолютно черного тела с единицы его поверхности. *Указание:* наилучшей моделью абсолютно черного тела является маленькое отверстие в сосуде, заполненном фотонным газом; тогда закон Стефана–Больцмана для мощности излучения с единичной площадки имеет вид $W = \sigma T^4$, где σ – постоянная Стефана–Больцмана, а T – абсолютная температура; также вам может оказаться полезной формула $J = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$, где J – количество молекул, соударяющихся с единичной площадкой в единицу времени.

Получите соотношение между σ и коэффициентом пропорциональности между давлением и четвертой степенью температуры.

е) Рассмотрим замкнутый цикл, совершаемый с фотонным газом, который состоит из четырех этапов: изобарическое расширение из точки A с температурой T_1 в точку B , далее переход из точки B в точку C с температурой T_2 по закону $PV^{4/3} = \text{const}$, потом изобарическое сжатие в точку D и переход в исходное состояние снова по закону $PV^{4/3} = \text{const}$. Вычислите КПД этого цикла.

В.Вавилов, В.Муравьев

Задача 4. Счетчик Гейгера

В задаче предлагается рассмотреть работу счетчика Гейгера по регистрации α -радиации. Счетчик Гейгера представляет собой заполненную газом ионизационную камеру, которая работает на эффекте разделения положительных и отрицательных зарядов, возникающих в процессе ионизации атомов газа α -частицами (дважды ионизированные атомы гелия, имеющие две единицы положительного заряда и четыре единицы массы). Заряды, попадая на стенки камеры, производят электрический импульс. Для α -частиц в воздухе при нормальном атмосферном давлении существует эмпирическое соотношение между средней длиной пробега частиц L_α и их энергией E : $L_\alpha = 0,318E^{3/2}$, где L_α измеряется в см, а E – в МэВ. Разность потенциалов между анодом и катодом подбирается достаточно большой, чтобы можно было пренебречь рекомбинацией зарядов в камере.

а) Для обнаружения α -частиц с $L_\alpha = 6,50$ см используется ионизационная камера с электрической емкостью $C = 45$ пФ и резистор с сопротивлением $R = 10$ МОм (рис. 6). Предполагая, что энергия, необходимая для образования пары ион – электрон в воздухе, равна 35 эВ, а напряжение $U = 10$ В, постройте график зависимости напряжения на резисторе, создаваемого пролетом через камеру одной α -частицы, от времени. Постоянная времени RC -цепочки много больше времени «оседания» зарядов.

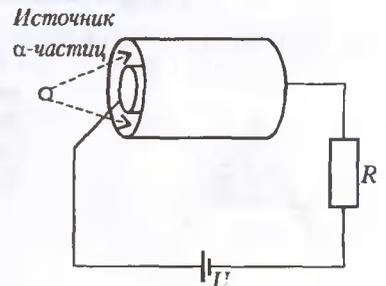


Рис. 6

б) Ионизационная камера имеет форму двух coaxialных цилиндров. Центральный цилиндр (анод) имеет радиус R_a , а внешний (катод) – R_k . Получите выражение для напряженности поля $E(r)$ в зависимости от расстояния r до оси ($R_a \leq r \leq R_k$), полагая, что заряд на единицу длины равен λ . Подсчитайте разность потенциалов между цилин-

драми, при которой произойдет пробой, если $R_a = 3$ мм, $R_k = 1$ см и напряженность поля пробоя $E_{пр} = 3$ МВ/м.

с) На ионизационную камеру, описанную в пункте б, направляется пучок α -частиц. Этот пучок вызывает ионизацию в камере с коэффициентом генерации Γ , постоянным по объему (коэффициент генерации есть число атомов, ионизованных в единице объема в единицу времени). Полагая, что

движение положительно заряженных ионов можно описать законом $v = \mu E$ (где μ – подвижность ионов), определите установившееся распределение объемной концентрации положительно заряженных ионов в зависимости от расстояния r до оси. Считать, что рекомбинации в системе нет. Поле объемных зарядов можно пренебречь.

В. Муравьев

Победители олимпиады

Первая лига

Золотую медаль получила

Флегонтова Екатерина – Россия, Якутск, школа 2;

серебряную медаль получил

Гизатулин Денис – Россия, Владивосток, школа 23;

бронзовые медали получили

Кириллов Василий – Россия, Иркутск, лицей 42,

Богач Максим – Россия, Иркутск, лицей 42,

Дайденов Артем – Россия, Зеленогорск, лицей 174,

Григорьев Тимур – Россия, Якутск, Республиканский колледж,

Готовцев Михаил – Россия, Якутск, школа 2.

Высшая лига

Золотые медали получили

Молдован Михай – Румыния, с. N. i «Tudor Viann»,
Татаринев Айсен – Россия, Якутск, Республиканский колледж;

серебряные медали получили

Проистосеску Кристиан – Румыния, с. N. i «Tudor Viann»,
Мохначевский Александр – Россия, Якутск, Республиканский колледж;

бронзовые медали получили

Карп Александру-Михай – Румыния, с. N. i «Tudor Viann»,
Харбанов Михаил – Россия, Якутск, Республиканский колледж.

*Публикацию подготовили
Ю. Григорьев, В. Муравьев, В. Потапов*

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Первый (районный) тур

1. Голодные Малыш и Карлсон съели торт и насытились. Голодный Карлсон легче сытого Малыша, а сытый Карлсон весит столько же, сколько два голодных Малыша. Что тяжелее: торт или голодный Малыш? (6)¹

К. Кохась

2. Равносторонний треугольник ABC разрезан прямыми линиями на 7 равносторонних треугольников и 3 равносторонних шестиугольника, как показано на рисунке 1, где многие прямые искривлены. У какого треугольника сторона

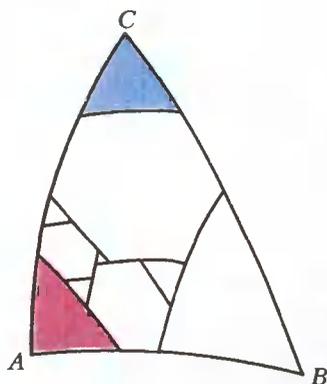


Рис. 1

длиннее – у прилегающего к вершине A или к вершине C ? (7)

К. Кохась, Р. Семизаров

3. Окружность 101 точкой разделена на равные дужки. Вася, начав с одной из точек, каждым ходом передвигает фишку по часовой стрелке на 6, 7, 8, 9 или 10 дужек, никогда не ставя ее в точку, где она уже была. Вася уже сделал 45 ходов. Докажите, что он может сделать еще хотя бы один ход. (8–10)

С. Иванов

4. Проведенная в точке A касательная к описанной окружности треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке K (рис. 2). Точки M и L –

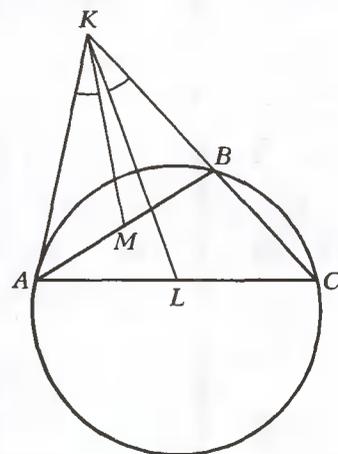


Рис. 2

¹ В скобках после условия каждой задачи указан класс, которому она предлагалась.

середины сторон AB и AC соответственно. Докажите равенство величин углов AKM и LKC . (11)

Ф.Бахарев

Второй (городской) тур

5. Закрасьте несколько клеток квадрата размером 10×10 так, чтобы каждая клетка соседствовала по стороне ровно с двумя закрашенными клетками. (6)

А. Железняк, В. Франк

6. Жителя села называют общительным, если он знаком не менее чем со 100 односельчанами. (Отношение знакомства симметрично: если Иванов знаком с Петровым, то и Петров знаком с Ивановым.) Докажите, что в любом селе есть два знакомых друг с другом общительных жителя или два незнакомых между собой необщительных жителя. (6, 8)

С. Иванов

7. а) Квадрат размером 300×300 разрезан на прямоугольники 1×3 . В каждом вертикальном прямоугольнике написан номер столбца, содержащего этот прямоугольник (аналогично тому, что сделано на рисунке 3 для квадрата размером 9×9). Докажите, что сумма написанных чисел делится на 3. (6)

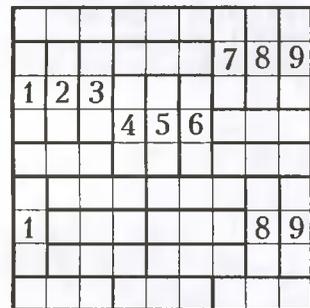


Рис. 3

б) Квадрат размером 40×40 разбит на полоски 1×4 . Для каждой вертикальной полоски написан номер столбца, в котором она лежит, а для каждой горизонтальной – номер строки, в которой она лежит. Докажите делимость суммы написанных чисел на 4. (8)

С.Иванов

8. Костя задумал четырехзначное число и написал остатки от деления этого числа на каждое из чисел от 1 до 100. Могло ли среди 100 выписанных чисел оказаться не менее 20 семерок? (6)

К.Кохась

9. Величина угла A треугольника ABC равна 60° . На лучах BA и CA отложены отрезки $BX = CY = BC$ (рис.4).

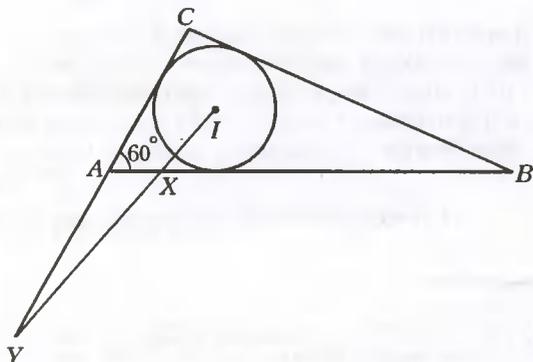


Рис. 4

Докажите, что прямая XU проходит через центр I вписанной окружности треугольника ABC . (8)

С.Иванов

10. 10000 точек расположены на плоскости в виде квадратной решетки (100 рядов по 100 точек с одинаковыми проме-

жутками между ними). Разрешено проводить прямые, не проходящие через левую нижнюю точку этой решетки. Каким наименьшим числом таких прямых можно покрыть все точки, кроме левой нижней? (8)

А.Косовская

11. Придумайте такое множество 100 натуральных чисел, что при любом разбиении его на два подмножества сумма чисел хотя бы одного из них делится на сумму чисел другого. (9)

С.Берлов

12. Докажите, что если шестиугольник $ABCDEF$ выпуклый и $\angle CAB = \angle FBA$, $\angle ECD = \angle BDC$, $\angle AEF = \angle DFE$, $\angle EAC = \angle FBD$, $\angle ACE = \angle BDF$ и $\angle CEA = \angle DFB$ (рис.5), то образованный отрезками AC , BD , CE , DF , EA и FB шестиугольник описанный. (9)

С. Берлов

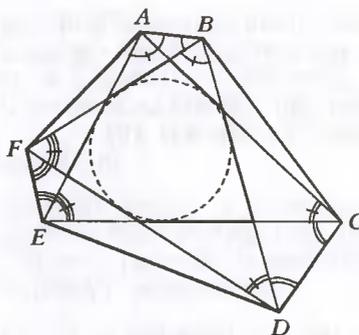


Рис. 5

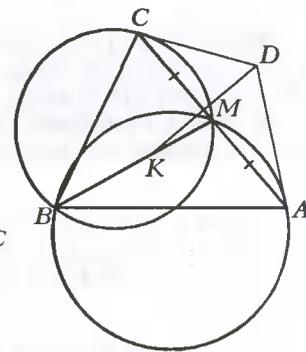


Рис. 6

13. BM – медиана остроугольного треугольника ABC (рис.6). Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABM и касательная в точке C к описанной окружности треугольника BCM пересекаются в точке D . Докажите, что точка K , симметричная точке D относительно прямой AC , лежит на прямой BM . (9)

Д.Шуряев

14. а) Найдите все такие неотрицательные целые p и q , что если для некоторых натуральных чисел a и b числа $a^2 + pa + q$ и $b^2 + pb + q$ взаимно просты, то и $\text{НОД}(a; b) = 1$. (9)

А.Храбров

б) Коэффициенты многочлена $f(x)$ – целые числа, причем $f(0) \neq 0$ и для любых не взаимно простых натуральных чисел a и b числа $f(a)$ и $f(b)$ тоже не взаимно просты. Докажите существование такого натурального числа $d > 1$, что для любого целого n число $f(n)$ делится на d . (11)

А.Храбров, Ф.Петров

15. Правильный треугольник со стороной 2003 разбит на 2003^2 правильных треугольничков со стороной 1. Федя и Саша по очереди рисуют замкнутые ломаные (каждым ходом – одну ломаную), проходящие по сторонам единичных треугольничков и ограничивающие выпуклый многоугольник. Никакие две проведенные ломаные не должны иметь ни одной общей точки. Начинает Федя. Проигрывает тот, кто сделал последний ход. Кто выиграет при правильной игре? (10)

Ф.Бахарев, Д.Карпов, А.Пастор

16. Дано n чисел, $n \geq 3$, произведение любых двух из которых является делителем суммы квадратов остальных $n - 2$ чисел. Докажите, что среди данных n чисел есть хотя бы два одинаковых. (10)

С.Иванов

17. Какое наибольшее число ребер может быть в графе, если в нем 1000 вершин и для любого его ребра AB степень хотя бы одной из вершин A и B не больше 10? (10)

С.Иванов

18. Существует ли в трехмерном пространстве конечное множество прямых, проходящих через одну точку, в котором каждая прямая перпендикулярна как минимум ста другим прямым из этого множества? (11)

Ф.Петров

Отборочный тур на Всероссийскую олимпиаду

19. Десять школьников стоят в ряд. Каждую минуту какие-то два соседних школьника меняются местами. Через некоторое время выяснилось, что каждый из школьников успел побывать и на первом, и на последнем месте. Докажите, что прошло не менее 65 минут. (9)

С.Берлов

20. Двое по очереди отмечают точки на плоскости, причем после каждого хода любые три отмеченные точки должны образовывать треугольник площадью не меньше 1 и не больше 1000. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия? (9)

Ф.Петров

21. Для любого натурального числа n к любому делителю числа $n!$, отличному от $n!$, можно прибавить такой делитель $n!$, что сумма тоже будет делителем $n!$. Докажите это. (9)

А.Голованов, А.Храбров

22. У деда Мороза есть n разных подарков и несколько одинаковых мешков. В каждом мешке лежат ровно два предмета (два мешка, два подарка или мешок и подарок). В частности, тот единственный мешок, который дед Мороз держит на плече, тоже содержит два предмета. Сколькими способами можно разложить подарки по мешкам? (9)

Э.Шрёдер, 1870 г.

23. На одной из вершин правильного 4006-угольника стоит фишка. Играют двое. Сначала первый игрок отмечает одну из вершин 4006-угольника. После этого они по очереди перемещают фишку по следующим правилам: фишку можно перемещать либо по главной диагонали, либо по кратчайшей (соединяющей две вершины, идущие через одну) диагонали 4006-угольника; нельзя возвращать фишку в ту вершину, из которой она только что пришла. Докажите, что второй игрок всегда сможет своим ходом поставить фишку в отмеченную первым игроком вершину. (10)

А.Дюбина

24. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b , что $b > 1$ и $a^b - 1$ делится на b^a . (10)

Ф.Петров

25. Угол разделен выходящими из его вершины лучами на $2n + 1$ равных углов. Эти углы отсекают на некоторой

прямой $2n + 1$ отрезок (рис.7). Докажите, что сумма длин 1-го, 3-го, ..., $(2n + 1)$ -го отрезков больше суммы длин остальных отрезков. (11)

К.Кноп



Рис. 7

26. Докажите, что в любом бесконечном подмножестве натурального ряда найдутся два элемента, сумма которых имеет простой делитель, больший миллиона. (11)

Ф.Петров

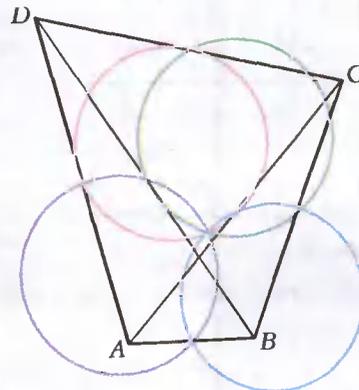
27. В пространстве отмечено $1000n^3$ точек, где $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что найдутся два треугольника с вершинами в этих точках, отношение площадей которых не меньше n . (11)

Ф.Петров

Открытая олимпиада ФМЛ 239

28. Дана шоколадка – прямоугольник шириной m клеток и высотой n . Играют двое. Можно взять любой отдельный кусок шоколадки (в начале игры такой всего один) и выгрызть из него полоску шириной 1 от одного края до другого, причем первому игроку разрешено выгрызть только горизонтально расположенные полоски, а второму – только вертикальные. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, т.е. тот, перед чьим ходом была съедена последняя долька. Докажите, что если m четно, а n нечетно, то выигрышная стратегия есть у второго игрока, а в остальных случаях – у первого. (8–9)

Дж.Байнум



29. «Пьяный король» не умеет делать два хода подряд в одном направлении. Он обошел доску размером 9×9 , побывав на каждой клетке по одному разу, и вернулся на исходное поле. Каково наименьшее возможное число диагональных ходов его маршрута? (8–9)

Рис. 8

С.Берлов, О.Ланин

30. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ (рис.8). Докажите, что окружности девяти точек треугольников ABC , ABD , ACD и BCD имеют общую точку. (Окружность девяти точек данного треугольника – это описанная окружность треугольника, образованного его средними линиями.) (10–11)

Ф.Бахарев

Публикацию подготовили К.Кохась, А.Спивак

Информацию о журнале "Квант" и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала "Квант"

kvant.info

(на этом сайте можно познакомиться, например, с материалами готовящихся к печати номеров журнала)

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

(здесь представлены все номера журнала начиная с 1970 года за исключением нескольких последних номеров)

Московский детский клуб "Компьютер"

math.child.ru

(здесь публикуются задачи конкурса имени А.П.Савина "Математика 6 – 8" и результаты его участников)

Костромской центр дополнительного образования "Эврика"

seemat.ru

(здесь можно найти задачи КМШ и "Задачника "Кванта")

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Более 25 лет при механико-математическом факультете МГУ работает Малый механико-математический факультет (МММФ). За годы своего существования заочное отделение Малого мехмата выпустило свыше 10000 учащихся, многие из которых стали студентами мехмата и других факультетов МГУ.

Основные задачи Малого мехмата – приобщение школьников к математике, углубление их знаний в рамках школьной программы и расширение математического кругозора. Каждую субботу сотни школьников Москвы и ближайшего Подмосковья приходят в аудитории Главного здания МГУ на занятия вечернего отделения. Каждый месяц сотни писем с выполненными заданиями заочного отделения поступают в адрес мехмата из многих уголков России, Украины, Казахстана и других стран СНГ и Прибалтики.

В 2004 году заочное отделение Малого мехмата объявляет набор *будущих восьмиклассников* – нынешних учащихся седьмых классов. На заочное отделение принимаются учащиеся из России, стран СНГ и Прибалтики, за исключением проживающих в Москве. Существует возможность обучения группы учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством преподавателя и может включать в себя не более 15 учащихся. Как правило, материалы методических разработок изучаются такими группами во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как один учащийся, т.е. оформляет по каждому заданию одну работу и оплачивает обучение всей группы как обучение одного учащегося.

Зачисление в восьмой класс (как для индивидуальных, так и для коллективных учеников) производится на конкурсной основе *по результатам выполнения вступительной работы*.

Обучение на заочном отделении платное. Информация об условиях оплаты будет выслана учащимся, зачисленным на заочное отделение, осенью 2004 года, после проверки вступительных работ.

Желающие поступить на заочное отделение Малого мехмата должны *не позднее 20 сентября 2004 года* (по почтовому штемпелю) выслать в наш адрес *простым письмом* решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Не забудьте вложить в работу конверт с написанным на нем Вашим адресом. Набор в 2004 году осуществляется *только в 8 класс*. Вступительную работу необходимо выполнить *в школьной тетради в клетку*. Записывать решения в тетрадь нужно в том порядке, в котором они указаны во вступительной работе. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

- 1) Фамилия, имя учащегося (для коллективных учеников – Ф.И.О. руководителя и алфавитный список учащихся, не более 15 человек)
- 2) Школа, класс (в 2004/05 учебном году)

Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ

Физический факультет МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы Заочной физической школы (ЗФС) при факультете на очередной учебный год.

Физический факультет МГУ готовит физиков – теоретиков и экспериментаторов по всем разделам современной

3) Полный домашний адрес с указанием индекса почтового отделения

4) Фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность (только для индивидуальных учеников)

5) Откуда Вы узнали о наборе на заочное отделение

Наш адрес: 119992 Москва, ГСП-2, Ленинские горы, МГУ, мехмат, МММФ.

Вечернее отделение МММФ приглашает на занятия всех желающих школьников 6 – 11 классов Москвы и ближнего Подмосковья.

Справки по телефону 939-39-43.

Более подробную информацию о Малом мехмате можно найти и в Интернете по адресу: <http://mmmf.math.msu.ru>

Вступительная работа

1. Решите уравнение $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x} + 3\right) = \frac{6x + 2}{3x}$.
 2. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике каждый из углов больше 89° , то каждый из них меньше 93° .
 3. Среди философов каждый седьмой – математик, а среди математиков каждый девятый – философ. Кого больше: философов или математиков?
 4. Чему равна предпоследняя цифра квадрата некоторого натурального числа, если последняя цифра равна пяти?
 5. Положительные числа a , b и c таковы, что $a \geq b \geq c$ и $a + b + c \leq 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.
 6. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей делится на 4.
 7. Леша увидел двух двухголовых дракончиков, головы которых спутались. Драконы бывают либо правдивые, т.е. все головы говорят только правду, либо лживые, т.е. все головы всегда лгут. Леша решил помочь дракончикам распутать головы. Но для этого ему надо знать, где чья голова. Он спросил это у дракончиков, на что головы ответили так.
Первая голова: «Я – правдивая голова».
Вторая голова: «Третья голова – моя родная голова».
Третья голова: «Вторая голова – не родная мне голова».
Четвертая голова: «Третья голова – лживая».
- Кому какая голова принадлежит?
8. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, а угол ABC равен 120° . Точка M – середина AC . Докажите, что биссектрисы углов BAC и BCA пересекаются на стороне BC .
 9. Даны три отрезка длины 1, 2, 3. Отрезок длины 3 как-то разбили на 100 других. Докажите, что среди получившихся 102 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.
 10. Встретились несколько друзей. Каждый из них обменялся рукопожатием с каждым, кроме Федота, который, будучи не в духе, некоторым пожал руку, а некоторым – нет. Всего было сделано 197 рукопожатий. Сколько рукопожатий сделал Федот?

физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений – таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование.

Выпускникам физического факультета присваивается степень магистра.

Основная цель ЗФШ – помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, прежде всего – на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до 1 октября по адресу:

119992 Москва, ГСП-2, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.

В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7×12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с Вашим адресом.

Фамилия, имя, отчество	<i>Пирогов Юрий Андреевич</i>
Класс ЗФШ	<i>10</i>
Профессия родителей	<i>мать – врач, отец – инженер</i>
Подробный домашний адрес	<i>120713 Москва, ул. Столетова, д.3, кв.13</i>
Номер и адрес школы	<i>школа 564, Севастопольский пр., д.5а</i>

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет МГУ удостоверения об окончании ЗФШ учитываются приемной комиссией).

Для проживающих в Москве и Московской области имеется вечерняя физическая школа.

Справки по телефону (095) 939-54-95 с 14 до 16 часов по рабочим дням.

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс нужно решить задачи 1–4, в 11 класс – задачи 4–7.

1. По взаимно перпендикулярным дорогам движутся два автомобиля с постоянными скоростями v_1 и v_2 . В момент времени, когда расстояние между ними минимально, первый автомобиль находится на расстоянии L от перекрестка. На каком расстоянии от перекрестка находится в этот момент второй автомобиль?

2. На пути тела массой m , скользящего по гладкой горизонтальной поверхности, находится незакрепленная горка высотой H и массой M . Передний склон горки плавно переходит в плоскость; горка может скользить по плоскости без трения и не отрываясь от нее. При какой минимальной скорости тела оно сможет преодолеть горку?

3. К бруску массой M , покоящемуся на горизонтальной плоскости, прикреплен пружина жесткостью k , которую начинают плавно растягивать горизонтальной силой. До начала движения бруска эта сила совершает работу A . Определите коэффициент трения тела о плоскость.

4. Придумайте качественную задачу по любому разделу физики и приведите ее решение.

5. Идеальный газ массой m и молярной массой M , имеющий начальную температуру T_0 , охлаждаются изохорически так, что его давление падает в k раз, а затем расширяют изобарически до тех пор, пока его температура не станет равной первоначальной. Определите совершенную газом работу.

6. Внутри уединенной толстостенной металлической сферической оболочки с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) на расстоянии $d < R_1$ от центра помещен точечный заряд Q . Определите потенциал центра оболочки.

7. Возможно ли существование электростатического поля, у которого силовые линии представляют собой сгущающиеся параллельные прямые?

20 февраля 2004 года на 54-м году жизни скончалась литературный редактор журнала «Квант» Людмила Владимировна Кардасевич.

Людмила Кардасевич связала свою жизнь с нашим журналом в самом начале его существования, в 1972 году, и все последующие годы работала с нами – сначала младшим редактором отдела физики, а затем литературным редактором всего журнала. Сотрудники и авторы, работавшие с Людой, любили и ценили ее как за человеческие качества – доброту, отзывчивость, самоотверженность, так и за высокий профессионализм. Всех поражало глубочайшее знание и понимание языка, умение увидеть и исправить невидимые с первого взгляда дефекты текста, найти изящный выход из любой сложной ситуации. Статья, прошедшая через руки Люды, в смысле языка всегда была безупречной.

Нам будет очень не хватать этого доброго и светлого человека.

*Редакционная коллегия, редакционный совет,
редакция журнала «Квант»*



**Людмила Владимировна Кардасевич
(1950–2004)**

К М Ш

Задачи

(см. «Квант» №2)

1. Очевидно, поезд не менял направления своего движения возле станции. Пусть тот из математиков, который находился ближе всех к голове поезда, во время отправления насчитал n скамеечек, тогда двое других насчитали $3 + n$ и $8 + n$ скамеечек. Несложно проверить, что $n \neq 0$. Кроме того,

$\frac{8+n}{3+n} = 1 + \frac{5}{3+n} < 3$, $\frac{3+n}{n} \neq 3$, поэтому возможен лишь единственный вариант, когда одно из трех чисел n , $3 + n$, $8 + n$ больше другого в три раза: $\frac{8+n}{n} = 3$, откуда $n = 4$.

Итак, третий математик насчитал $3 + 4 = 7$ скамеечек.

2. 3602541987.

3. Согнем салфетку так, чтобы точка A (рис. 1) совместилась с точкой O , при этом линия сгиба пройдет по пунктирному отрезку $MN \parallel OB$.

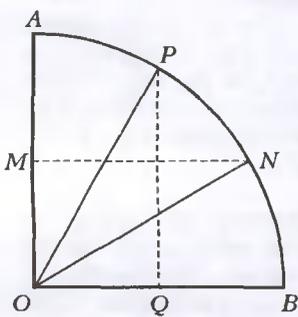


Рис. 1

Проделаем такую же операцию, совместив точку B с точкой O , при этом линия сгиба пройдет по пунктирному отрезку $PQ \parallel AO$. В равных прямоугольных треугольниках OMN и OPQ гипотенузы ON и OP вдвое длиннее их катетов OM и OQ . Следовательно, $\angle MOP = \angle OPQ = 30^\circ$, $\angle BON = \angle ONM = 30^\circ$, $\angle PON = 30^\circ$. Таким образом, оба сгиба разделят дугу AB в

точках N и P на 3 равные части.

4. Ровно два числа не могут быть отрицательными.

Предположим, что это не так. Пусть три числа a, b, c таковы, что $a + b + c > 0$, $a^3 + b^3 + c^3 < 0$, $a \geq 0$, $b < 0$, $c < 0$. Поскольку $a > -(b+c)$, то $a^3 > -(b+c)^3 = -b^3 - c^3 - 3bc(b+c)$, откуда $a^3 + b^3 + c^3 > -3bc(b+c)$. Последнее неравенство невозможно, поскольку в левой его части стоит отрицательное число, а в правой положительное. Противоречие.

5. Найти пример для 16 клеток не составляет труда – достаточно отметить, например, все клетки любых двух соседних горизонталей (или соседних вертикалей). На рисунке 2 пока-

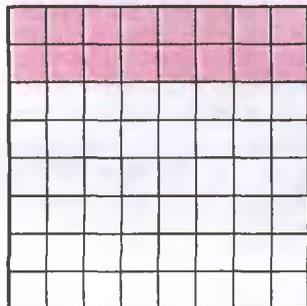


Рис. 2

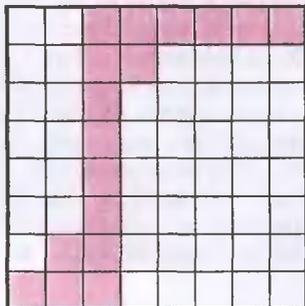


Рис. 3

зан один из таких вариантов (отмеченные клетки закрашены красным цветом).

После того как обнаружен ответ на первый вопрос, создается впечатление (проверено на себе!), что ответ на второй вопрос должен быть отрицательным. Тем не менее, и здесь ответ тот же: можно! Вот вариант (рис.3).

К сожалению, отметить 18 клеток не удалось, но и доказать, что это невозможно, – тоже не удалось.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №6 за 2003 г.)

11. Пусть $a = u^6$, $b = u^4$, $c = u^3$, где u – некоторое натуральное число. Тогда исходное уравнение запишется так: $3u^{12} = d^5$. Далее, пусть $u = 3^n$, $d = 3^m$, где n, m – натуральные. Тогда $12n + 1 = 5m$. Последнее уравнение имеет бесконечно много решений: $n = 5k + 2$, $m = 12k + 5$, $k = 0, 1, 2, \dots$

12. Числа n , $S(n)$ и $S^2(n)$ имеют одинаковые остатки при делении на 3. Из уравнения $S^2(n) + S(n) = n$ следует, что все эти числа делятся на 3. Пусть $S(n) = 3k$, где k – натуральное. Рассмотрим сумму $S^2(n) + S(n) = 9k^2 + 3k$. При $k = 1, 2, 3, 4$ она равна 12, 42, 90, 156 соответственно. Все эти числа, как легко проверить, удовлетворяют условию задачи (например, $S(12) = 3$, $3 \times 4 = 12$).

Покажем, что при других значениях k выражение $9k^2 + 3k$ не может представлять натуральное число с суммой цифр $3k$. При небольших значениях $k = 5, 6, \dots, 12$ это проверяется непосредственно. При дальнейшем увеличении k для записи числа с суммой цифр $3k$ требуется больше разрядов, чем используется в записи числа $9k^2 + 3k$. Докажем последнее утверждение.

Если натуральное $m \geq 4$ и $3m < k \leq (m+1)$, то число $9k^2 + 3k$ не более чем m -значное: $9k^2 + 3k < \underbrace{99\dots9}_k$, при этом для записи числа с суммой цифр $3k > 9m$ требуется более m разрядов. Имеем

$$9k^2 + 3k \leq 81(m+1)^2 + 9(m+1) = 9(9(m+1)^2 + (m+1)) = 9(m+1)(9m+10) < 9(m+1)(10m+10) < 90(m+1)^2.$$

Но при $m \geq 4$ справедливо неравенство $(m+1)^2 < 10^{m-2}$ (его можно доказать, например, методом математической индукции). Поэтому

$$9k^2 + 3k < 9 \cdot 10^{m-1} < \underbrace{99\dots9}_m.$$

Итак, множество $\{12, 42, 90, 156\}$ содержит все искомые значения n .

13. Приведем один из возможных способов. Допустим, нам как-то удалось найти центр O данного квадрата $ABCD$. Проведем из точки O дугу окружности с центром в точке A до пересечения со стороной AB в точке P . Затем проведем из точки O дугу окружности с центром в точке C до пересечения со стороной CD в точке Q (рис.4). При этом квадрат окажется разделен на две равные части – криволинейные трапеции $APQD$ и $CQOPB$, а поскольку они равны, то,

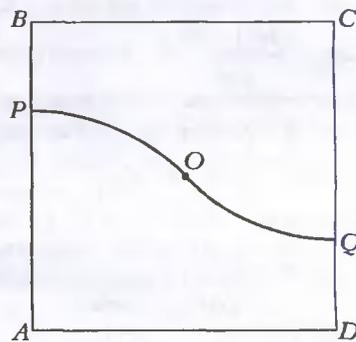


Рис. 4

конечно, равновелики. Так что осталось, пользуясь только циркулем, найти центр квадрата. Для его нахождения воспользуемся способом деления пополам отрезка, заданного своими концами. Этот способ предложил итальянский геометр Лоренцо Маскерони (1750–1800). Дальнейшие построения объясняют, как построить середину отрезка AC . Первым делом построим точку K , симметричную точке A относительно точки C . Для этого проводим дугу окружности с центром в точке C и радиусом CA . Отправляясь от точки A , трижды отложим на построенной дуге радиус окружности.

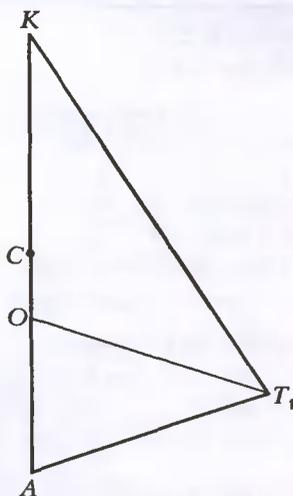


Рис. 5

Получим точку, диаметрально противоположную точке A , — точку K ; $AK = 2AC$. Далее проводим окружность с центром в точке A радиуса AC , а также окружность с центром в точке K радиуса KA . Они пересекаются в двух точках T_1 и T_2 . Проведем новые окружности с центрами в точках T_1 и T_2 одного и того же радиуса $T_1A = T_2A = AC$. Они пересекаются в точке O , являющейся серединой отрезка AC . Действительно, из симметрии фигуры явствует, что точка O лежит на прямой AK . Равнобедренные треугольники AOT_1 и AT_1K (рис.5) подобны друг другу

(они имеют общие углы при основании), откуда

$$\frac{AO}{AT_1} = \frac{AT_1}{AK} = \frac{1}{2}. \text{ Но } AT_1 = AC, \text{ поэтому } AO = \frac{1}{2}AC. \text{ Итак,}$$

точка O — искомая.

14. Зададимся произвольным натуральным числом N и положим $K = N \cdot (N + 1) \cdot (N + 2) \cdot \dots$

$\dots \cdot (N + M) + N$. Несложно проверить, что числа K и N удовлетворяют условию задачи.

Подумайте, почему не существует двух бесконечных последовательностей натуральных чисел $K, K + 1, K + 2, \dots$ и $N, N + 1, N + 2, \dots$ таких, что $K \neq N$ и каждый член первой последовательности делится на соответствующий член второй последовательности.

15. Сначала убедимся в том, что $m + n - 1$ указанных клеток достаточно для однозначного заполнения всей таблицы. Пронумеруем строки таблицы сверху вниз числами $1, 2, \dots, m$, а столбцы — слева направо числами $1, 2, \dots, n$. Пусть строки таблицы имеют высоту a_1, a_2, \dots, a_m , а столбцы — ширину b_1, b_2, \dots, b_n . Укажем на все клетки 1-й строки и 1-го столбца и потребуем заполнить их нужными числами (при этом будет указано ровно $m + n - 1$ клеток). В 1-й строке будут расположены произведения $a_1b_1, a_1b_2, \dots, a_1b_n$, а в 1-м столбце — произведения $a_1b_1, a_2b_1, \dots, a_mb_1$. А теперь заметим, что

$$a_i b_j = \frac{(a_i b_j) \times (a_1 b_1)}{(a_1 b_1)}. \text{ Таким образом, располагая имеющимися}$$

произведениями, можно вычислить площадь клетки, образованной пересечением произвольной i -й строки ($i = 2, 3, \dots, m$) и произвольного j -го столбца ($j = 1, 2, \dots, n$).

Теперь докажем, что меньшее количество клеток указать невозможно. Заметим, что если в таблице указано несколько клеток и по ним можно заполнить все остальные клетки, то в каждой строке и в каждом столбце должна находиться хотя бы одна указанная клетка.

Менее очевидным представляется следующий факт. От любой указанной клетки можно перейти к любой другой указанной клетке ходами ладьи только по указанным клеткам. Для доказательства последнего утверждения используем метод «от противного». Допустим, от некоторой указанной клетки K нельзя перейти ко всем другим указанным клеткам. Закрасим в красный цвет все указанные клетки, до которых можно добраться ходами ладьи от клетки K (включая и саму клетку K). Теперь заметим, что если поменять местами любые две строки или любые два столбца, то на возможность однозначного заполнения неуказанных клеток это никак не влияет (меняется лишь нумерация столбцов и строк, и больше ничего). Поэтому переставим горизонтали таблицы так, чтобы все

строки с красными клетками заняли самые нижние несколько строк (возможно, одну). После этого переставим вертикали таблицы так, чтобы все красные клетки оказались в самых левых нескольких столбцах. Таким образом, вся группа красных клеток расположена в некоторой прямоугольной области A (рис.6), причем в каждой вертикали и в каждой горизонтали области A находится хотя бы одна красная клетка. Тогда в прямоугольных областях B и C не должно быть красных клеток

B	D
A	C

Рис. 6

— они целиком состоят из неуказанных клеток. Все остальные (не красные) указанные клетки (а таковые имеются — хотя бы одна) лежат в области D .

А теперь допустим, что мы имеем даже больше, чем хотели: нам известны числа, которые должны стоять во всех клетках областей A и D . Убедимся, что и в этом благоприятном случае мы не сможем однозначно заполнить ни одной клетки из областей B и C . Опять допустим противное, т.е. что такое однозначное заполнение возможно. Увеличим вдвое все числа, соответствующие вертикалям области A и всем горизонталям области D , одновременно уменьшив вдвое все числа, соответствующие горизонталям области A и вертикалям области D . При этом произведение во всех клетках областей A и D не изменится, тогда как в областях B и C ситуация будет иной: все произведения в области B возрастут в 4 раза, а в области C — уменьшатся в 4 раза. Таким образом, одному и тому же набору значений в указанных клетках могут соответствовать различные наборы в неуказанных клетках. Противоречие.

Итак, необходимо, чтобы все указанные клетки были соединены между собой ходами ладьи и при этом чтобы в каждой строке и каждом столбце было не меньше одной указанной клетки. Докажем, что при соблюдении этих условий количество указанных клеток не меньше $m + n - 1$. Для доказательства будем расставлять в указанные клетки крестики (по одному). Каждую вертикаль или горизонталь, в которой еще нет крестика, назовем живой, а ту, в которой крестик уже поставлен, — убитой.

Первоначально имеется всего $m + n$ живых горизонталей и вертикалей. Поставим крестик на любую указанную клетку. При этом будут убиты одна горизонталь и одна вертикаль, т.е. останутся живыми всего $m + n - 2$ горизонталей и вертикалей. Далее будем ставить по одному крестику на клетки, которые «связаны» с какой-либо из клеток, где крестик уже поставлен, ходом ладьи (вертикальным или горизонтальным). После установки каждого такого крестика общее число живых вертикалей и горизонталей уменьшится не более чем на 1. После расстановки всех крестиков должны быть убиты все горизонталь и вертикали. Таким образом, после первого крестика надо поставить еще не меньше $m + n - 2$ крестиков, а всего — не меньше $1 + (m + n - 2) = m + n - 1$. Поскольку все крестики расставлялись только на указанные клетки, то указанных клеток не меньше $m + n - 1$.

Числа Каталана

1. 1430. *Указание.* Рассмотрите некоторую отмеченную точку и хорды, которые соединяют ее с другими отмеченными точками и делят окружность на части, в каждой из которых число отмеченных точек четное.

2. 42. **3.** 1430. **4.** 429. **5.** 132. **6.** 4862.

7. *Указание.* Поскольку рекуррентная формула одинаково читается как слева направо, так и справа налево, то четны все числа C_{2n+1} , где $n > 0$. По той же причине число C_{2n} четно тогда и только тогда, когда четно число C_n .

8. $(ab) \rightarrow ()$;
 $((ab)c) \rightarrow (())$, $(a(bc)) \rightarrow (())$;
 $((ab)c)d \rightarrow ((()))$, $((a(bc)d) \rightarrow (())())$,
 $(a((bc)d)) \rightarrow ()(())$, $(a(b(cd))) \rightarrow ()()()$,
 $((ab)(cd)) \rightarrow (())()$.
10. *Указание.* Для каждой правильной расстановки n пар скобок создайте таблицу, записав в нижнюю ее строку номера открывающих, а в верхнюю – номера закрывающих скобок.
12. *Указание.* Вообразите, что у корневого плоского дерева с n листьями, степени вершин которых могут равняться только 1 или 3, одновременно отсохли все листья.
14. Как нетрудно проверить, $F(x) \cdot (1 - x - x^2) = x$. Осталось разложить дробь $\frac{1}{1 - x - x^2}$ на простейшие:

$$F(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1} = \frac{-x}{\left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)} - \frac{1}{\left(x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)} \right) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{5}} \left(\frac{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}{1 + x \frac{\sqrt{5} - 1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}{1 - x \frac{\sqrt{5} + 1}{2}} \right).$$

Воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \dots,$$

получаем

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(x \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(x \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^k \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} \left(\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \right).$$

Обозначив $k + 1 = n$, получаем формулу Бине:

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Теплопроводность льда выше, чем снега. При одном и том же перепаде температур между водой в пруде и атмосферным воздухом на расчищенном от снега участке толщина льда будет больше.
2. Благодаря хорошей теплопроводности меди, температура серной головки быстро достигнет точки воспламенения.
3. При касании холодного металла, обладающего хорошей теплопроводностью, имеющаяся на коже влага замерзает, и палец может «примерзнуть» к металлическому предмету.
4. При слабом накале капля воды прилегает к плите вплотную, не образуя слоя плохо проводящего тепло водяного пара.
5. Нет, нельзя. Не стекло, а заключенный между рамами воздух, плохо проводящий тепло, защищает комнату от холода.
6. Нагреванием верхней части пробирки удастся избежать конвекции, а поскольку теплопроводность воды очень мала, то прогрев ее сверху вниз идет очень медленно.

7. Нет, так как перемешивания воды не будет, и ее остывание займет много времени. Лед следовало поместить сверху.
8. Горелка коптит из-за недостатка кислорода. Открытая с обоих концов вертикальная стеклянная трубка увеличивает тягу и вызывает конвективный приток кислорода к пламени.
9. При неравномерном нагревании сосуда конвективные потоки переносят оседающую на дно мусть к более теплой стенке. Зимой обращенная к комнате стенка теплее противоположной; значит, опыт проводился зимой.
10. Термометры, расположенные в тени, показывают температуру окружающего воздуха. Термометры же, установленные на солнце, показывают температуру, зависящую от их способности поглощать энергию излучения. Следовательно, показания термометров будут различаться, но при этом говорить о «температуре на солнце» не имеет смысла.
11. Высота полета шара немного уменьшится, поскольку из-за охлаждения и уменьшения объема уменьшается и действующая на шар выталкивающая сила.
12. Во втором случае цилиндр остынет быстрее, так как его излучающая поверхность больше.
13. Свойства выходящего из отверстия излучения при тепловом равновесии не зависят от природы находящихся в печи раскаленных тел, поэтому все они будут представляться одинаково светлыми.
14. Кварц, в отличие от стали, почти не поглощает видимый свет, поэтому при нагревании он излучает в видимой области значительно слабее стали.
15. Кривая 1 отвечает стеклу, кривая 2 – графиту. Темный графит интенсивнее и поглощает излучение, и испускает его.
16. Благодаря излучению пламени, стена прогреется и будет излучать тепло в сторону свечи. На стеарин попадают также отраженные от стены лучи. Кроме того, со стороны стены затруднены конвективные потоки, и там стеарин не охлаждается потоком воздуха. Все это приведет к тому, что стеарин в основном будет стекать к стене.

Микроопыт

На пожелтевшей бумаге будет виден светлый след от металлического предмета. Теплопередача от пламени к бумаге снизу одинакова по всей площади, где пламя касается листа. Теплопередача же от бумаги к находящемуся над ней воздуху меньше, чем от нее к воздуху через металл. Поэтому бумага под предметом будет холоднее, чем остальная бумага, и в меньшей степени изменит свой вид.

Теоремы Менелая и Чевы

3. $\frac{1}{11}b$.

4. Пусть h_A, h_B, h_C, h_D – расстояния от точек A, B, C и D до плоскости. Тогда

$$\frac{AK}{KB} = \frac{h_A}{h_B}, \frac{BL}{LC} = \frac{h_B}{h_C}, \frac{CM}{MD} = \frac{h_C}{h_D}, \frac{DN}{NA} = \frac{h_D}{h_A}.$$

Осталось перемножить полученные пропорции. По существу, мы доказали аналог теоремы Менелая в пространстве.

5. Из равенства отрезков касательных следует, что $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1$. Проведем плоскость через точки K, L и M . Пусть она пересекает DA в точке N^* . По доказанному в предыдущем упражнении, $\frac{AK}{KL} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN^*}{N^*A} = 1$.

Следовательно, $\frac{DN}{NA} = \frac{DN^*}{N^*A}$, но тогда $N^* = N$.

6. Пусть P, Q и R – середины отрезков BC, CE и BF , а точки K, L и M – середины AC, BD и EF (сделайте рисунок). Точка K лежит на прямой PQ, L – на прямой PR, M – на

прямой RQ . Достаточно доказать, что

$$\frac{KP}{KQ} \cdot \frac{LR}{LP} \cdot \frac{MQ}{MR} = 1.$$

Но

$$\frac{KP}{KQ} \cdot \frac{LR}{LP} \cdot \frac{MQ}{MR} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{DE}{DC} \cdot \frac{FC}{FB},$$

а последнее произведение равно 1 по теореме Менелая для треугольника BCE и прямой ADF .

7. Указание. Пусть P, Q и R — точки пересечения прямых AB и ED, BC и EF, CD и AF . Пусть также K, L и M — точки пересечения AB и CD, CD и EF, EF и AB . Треугольник KLM пересечен тремя прямыми: BC, DE и AF . Запишите теорему Менелая для каждой из этих прямых, а затем перемножьте полученные произведения. Далее воспользуйтесь свойствами отрезков секущих. Например, $KB \cdot KA = KC \cdot KD, LE \cdot LF = LD \cdot LC$ и т.п. В результате получится, что

$$\frac{PM}{PK} \cdot \frac{QL}{QM} \cdot \frac{RK}{RL} = 1,$$

а это и значит, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.

8. Пусть x, y, z — расстояния от точки P , взятой на дуге AC описанной окружности, до вершин A, B и C соответственно, а A_1, B_1, C_1 — проекции точки P на прямые BC, AC и AB . Пусть также $\angle PAB = \varphi, \angle PBC = \psi, \angle ACP = \chi$. Тогда ориентированные отрезки с точностью до знака таковы:

$$B_1A = x \cos \psi, B_1C = z \cos \chi, C_1A = x \cos \varphi, C_1B = y \cos \chi,$$

$$BA_1 = y \cos \psi, CA_1 = z \cos \varphi.$$

Записав их отношения, приписав им нужные знаки, и перемножив, получим равенство

$$\frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} \cdot \frac{A_1C}{A_1B} = 1.$$

11. Пусть a, b, c — стороны треугольника ABC .

Пункты а), б), в) очевидны.

г) Воспользуйтесь тем, что длины отрезков от вершин треугольника до точек касания с вписанной окружностью равны $p - a, p - b, p - c$, где p — полупериметр.

Пункты д) и е) решаются аналогично пункту г).

ж) Пусть A', B' и C' — вершины правильных треугольников, построенных на сторонах BC, AC и AB соответственно, а A_1, B_1, C_1 — точки пересечения отрезков AA', BB' и CC' с соответствующими сторонами или их продолжениями. Заметим, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \pm \frac{S_{ABA'}}{S_{ACA'}} = \pm \frac{c}{b},$$

причем знак «минус» берется в том случае, когда точка A_1 лежит вне отрезка BC . Аналогично поступим с отношениями для точек B_1 и C_1 . После перемножения имеем

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

Изогональное сопряжение в тетраэдре и его гранях

2. Достаточно доказать следующий факт. Пусть дан угол с вершиной O и точка P , точки A, B — проекции P на стороны угла, $OP \perp AB$. Тогда $\angle POA = \angle POB$ (рис. 7). Это следует из того, что четырехугольник $PAOB$ — вписанный, и, значит, углы POA и PBA равны, а $\angle POB = \angle POA$, так как их стороны перпендикулярны. Случай

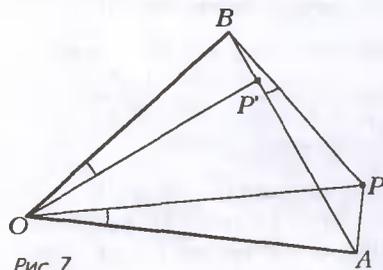


Рис 7

другого расположения угла и точки P рассматриваются аналогично.

4. Докажем сначала свойство 4.

Для любой точки внутри треугольника ее расстояния x, y, z до его сторон удовлетворяют условию $ax + by + cz = 2S$, где a, b, c — длины сторон треугольника, S — его площадь. Выразив из этого равенства c , подставив полученное выражение в $a^2 + b^2 + c^2$ и рассмотрев получившуюся функцию как квадратный трехчлен сначала от a , а потом от b , убедимся, что ее минимум достигается при $x : y : z = a : b : c$. По свойству 2, точка с таким свойством изогонально сопряжена центру тяжести.

Докажем теперь свойство 5. Пусть T' — точка, сопряженная точке Торричелли T треугольника ABC , а точки A', B', C' — проекции точки T' на стороны треугольника. По свойству 1, прямые AT, BT, CT перпендикулярны сторонам треугольника $A'B'C'$. Поскольку каждый из углов ATB, BTC, CTA равен 120° , треугольник $A'B'C'$ — правильный, т.е. точка T' — точка Аполлония треугольника ABC .

Нестандартные конденсаторы

- $A = \frac{\epsilon_0 S \epsilon^2 L_2}{2(d - L_1)(d - L_1 + L_2)}$.
- $A = \frac{\epsilon_0 S \epsilon^2}{d}$.
- $q_3 = \frac{\epsilon_0 S \epsilon}{d} + \frac{q_0}{2}$.
- $A = \frac{q^2 a (d^2 - 4a^2)}{8\epsilon_0 S d^2}$; $I = \frac{q a^2}{\epsilon_0 S d R}$.

XII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

- 9091
9901. Указание.

$$\begin{aligned} 101011110101 &= 10^{12} + 10^{10} + \frac{10^5 - 1}{9} \cdot 10^4 + 100 + 1 = \\ &= \frac{9 \cdot 10^{12} + 9 \cdot 10^{10} + 10^9 - 10^4 + 900 + 9}{9} = \\ &= \frac{10^9 \cdot 9091 - 9091}{9} = 9091 \cdot 111111111. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуется знаменатель.

- \sqrt{ab} . Указание. Воспользуйтесь подобием треугольников ADC и BCD .
- $(0; 0), (\pm 1; \pm 1)$. Указание.

$$x^2(1+x^2) + y^2(1+y^2) \geq 2|x||y|(1+x^2)(1+y^2) \geq 8x^2y^2.$$

Равенство возможно либо при $x = y = 0$, либо при $|x| = |y| = 1$.

- а) 1; б) 1, 2. Указание. а) Если $n \geq 2$ и данное число полный квадрат, то n четно (рассмотрите остатки от деления на 8). Но при четном n число $5^n + 4^n$ дает остаток 2 при делении на 3, т.е. не является квадратом. б) Аналогично, при $n \geq 2$ число $5^n - 4^n$ дает при делении на 8 остаток 5, если n нечетно, и потому квадратом не является. Если же $n = 2k$ и $5^{2k} - 4^{2k} = m^2$, то $(5^k - m)(5^k + m) = 4^{2k}$, откуда $5^k - m = 2^q$, $5^k + m = 2^q$, т.е. $2m = 2^q - 2^p$, но m нечетно и, следовательно, $p = 1, q = 4k - 1$. Значит, $2 \cdot 5^k = 2 + 2^{4k-1}$, т.е. $2^{4k-2} + 1 = 5^k$. Однако при $k \geq 2$ справедливы неравенства $2^{4k-2} + 1 \geq 2^{4k-2} > 5^k$, так как $16^k > 4 \cdot 5^k$.

5. 45° или 135°. *Указание.* Заметим, что ортоцентр треугольника BHC должен лежать на каждой из окружностей, симметричных окружности BHC относительно сторон BH и HC (докажите!), т.е. совпадать с точкой A . Отсюда следует, что H – ортоцентр треугольника ABC . Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $AH = BC |\operatorname{ctg} \alpha|$. Из равенства $AH = BC$ следует, что $|\operatorname{ctg} \alpha| = 1$.

6. 16. *Указание.* Пусть n – искомое число, m – число депутатов, голосовавших «за». Тогда

$$\frac{68}{100} < \frac{m}{n} < \frac{69}{100},$$

т.е.

$$\frac{100}{69} < \frac{n}{m} < \frac{25}{17},$$

$$\frac{31}{69} < \frac{n-m}{m} < \frac{8}{17},$$

$$\frac{17}{8} < \frac{m}{n-m} < \frac{69}{31},$$

$$\frac{31}{7} < \frac{n-m}{3m-2n} < 8.$$

Отсюда следует, что

$$3m - 2n \geq 1, \quad n - m \geq 5,$$

т.е. $n \geq 16$. Число 16 удовлетворяет условию (тогда $m = 11$).

7. а) Можно; б) можно. *Указание.* а) Задача решается по индукции по $m + n$. Для $m + n = 2$ утверждение очевидно.

Пусть для любых m и n таких, что $m + n \leq k$, и чисел $a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ искомую таблицу можно построить.

Если даны числа a_1, a_2, \dots, a_m и b_1, b_2, \dots, b_{n+1} , строим таблицу $m \times n$ для чисел a_1, \dots, a_m и $b_1, b_2, \dots, b_n = b_n + b_{n+1}$, после чего добавляем $(n + 1)$ -й столбец так, чтобы выполнялось условие задачи.

б) Здесь тоже можно было бы воспользоваться индукцией. Мы же поступим иначе. Пусть даны 2 набора положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_m и b_1, \dots, b_n , для которых $a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n = S$. Рассмотрим отрезок длины S , на котором сложим последовательно отрезки длиной a_1, a_2, \dots, a_m . Затем на том же отрезке сложим отрезки b_1, b_2, \dots, b_n . Пусть a_{ij} – длина отрезка, являющегося пересечением i -го отрезка из отрезков a_1, \dots, a_m и j -го отрезка из отрезков b_1, \dots, b_n . В таблицу $m \times n$ следует поместить число a_{ij} . Очевидно, суммы чисел в строках и столбцах полученной таблицы удовлетворяют условию.

ФИЗИКА

1. Максимальная температура воды достигается в 19.00 часов.
2. Жесткость пружины должна быть пропорциональна модулю упругости материала пружины и обратно пропорциональна ее длине:

$$k = A(D, d) \frac{E}{l},$$

причем коэффициент пропорциональности A зависит от диаметра витков D и диаметра проволоки d . Поскольку размерность жесткости $[k] = \text{Н/м}$, а размерность модуля упругости $[E] = \text{Н/м}^2$, то коэффициент пропорциональности должен иметь размерность $[A] = \text{м}^2$. Следовательно, при изменении D и d в одно и то же число раз α коэффициент A изменится в α^2 раз. В данном примере D и d второй проволоки в 3 раза больше, а длина l больше в 7 раз. Получаем

$$k_2 = \frac{3^2}{7} k_1 = 18 \text{ Н/м}.$$

3. Пусть в момент отрыва груз массой m_1 находится на высоте $h = R \cos \alpha$, а полусфера массой m_2 движется со скоростью v_2 .

Запишем законы сохранения энергии и импульса в инерциальной системе отсчета, движущейся со скоростью v_2 . В этой системе груз и полусфера вначале имеют одну и ту же скорость v_2 , в момент отрыва полусфера покоится, а груз движется со скоростью, равной v_1 и направленной по касательной к поверхности полусферы. Получаем

$$\frac{(m_1 + m_2)v_2^2}{2} + m_1 g R = \frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g R \cos \alpha,$$

$$(m_1 + m_2)v_2 = m_1 v_1 \cos \alpha.$$

Запишем теперь второй закон Ньютона для груза в момент отрыва в системе отсчета, связанной с полусферой, где груз движется по окружности. Поскольку полусфера движется с ускорением, то эта система отсчета неинерциальная. Однако в момент отрыва сила давления груза на полусферу обращается в ноль, ускорение полусферы и сила инерции, действующая на груз, также исчезают, и закон Ньютона принимает вид

$$m_1 g \cos \alpha = \frac{m_1 v_1^2}{R}.$$

Из этого уравнения и законов сохранения энергии и импульса получаем уравнение

$$\cos^3 \alpha - 3 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \cos \alpha + 2 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) = 0,$$

или, поскольку в данной задаче $m_1 = m_2$,

$$\cos^3 \alpha - 6 \cos \alpha + 4 = 0.$$

Одним из корней этого кубического уравнения является число 2. Разделив на $(\cos \alpha - 2)$, приходим к квадратному уравнению

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 2 = 0,$$

из которого находим $\cos \alpha = \sqrt{3} - 1$, откуда

$$h = (\sqrt{3} - 1)R.$$

4. Отношение числа молекул водорода в пучке к числу молекул кислорода равно

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{3/2} = 64.$$

5. Обозначим искомый потенциал φ . Докажем, что этот потенциал равен потенциалу центра полусферы, т.е. что

$$\varphi = k \frac{q}{R}.$$

Для этого приставим к полусфере другую точно такую же заряженную полусферу так, чтобы вместе они образовали целую сферу. Потенциал, создаваемый второй полусферой в рассматриваемой точке, из соображений симметрии также равен φ . Однако потенциал целой сферы в этой точке равен потенциалу центра сферы. Получаем

$$2\varphi = k \frac{2q}{R}, \text{ или } \varphi = k \frac{q}{R},$$

что доказывает наше утверждение.

6. $t_1 \approx \frac{4}{3} \frac{R}{h_2 - h_1} \left(\sqrt{\frac{2h_1}{g}} + \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \right) \approx 11,4 \text{ ч},$

$$t_2 \approx \sqrt{\frac{2h_1}{g}} + \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \approx 4 \text{ мин},$$

где $R = 6400 \text{ км}$ – радиус Земли.

7. За один год радиус орбиты увеличится примерно на 1 см, а за миллиард лет – на 10^4 км .

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. 11 ч 48 мин.
2. Можно.
3. $(2003^2 + 2003 + 1)^2$. *Указание.* Пусть $a = 2003$. Подкорен-

ное выражение имеет вид

$$a^2 + a^2(a+1)^2 + a^2 + 2a + 1 = (a^2 + a + 1)^2.$$

4. Нет. *Указание.* Пусть a и b – основания трапеции, a с и d – ее боковые стороны. Докажите, что $|a - b| > |c - d|$.

5. 1, 2, 3, 4, 6.

6. Можно.

7. Воспользуйтесь тем, что $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{21}$.

8. 1,5 раза.

9. Прав. Если хотя бы один кусок – прямоугольный треугольник, то торт имеет форму равнобедренного треугольника.

10. Сумма четвертых степеней не меньше. *Указание.* При $x > 0$ справедливо неравенство $x^4 - x^3 \geq x^2 - x$, ибо

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 - (x^2 - x) &= x^2(x^2 - x) - (x^2 - x) = \\ &= (x^2 - x)(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Осталось записать неравенства

$$x_i^4 - x_i^3 \geq x_i^2 - x_i$$

и сложить их.

ФИЗИКА

1. Прилив начинается позже – когда уровень воды поднимается до нового места жительства рыбака. Отлив начинается всюду одновременно.

2. Правый груз ударится раньше.

3. Во втором.

4. За 2 часа объехать астероид невозможно, так как для этого надо передвигаться со скоростью, большей первой космической.

5. $\beta = \arctg 0,75$.

6. Сила Архимеда компенсирует вес воздуха в мешке.

7. Ускорение поршня равно нулю, ускорение сосуда составляет $3g$.

$$8. \frac{\Delta m}{m} \sim \frac{\rho_v - \rho_l}{\rho_v} \frac{gh}{\lambda} \approx 0,0015.$$

$$9. \tau = \frac{cm\Delta t}{P} = 84 \text{ с}.$$

10. 24 В. *Указание.* Из соображений размерности потенциал в вершине кубика пропорционален q/a . Центр кубика находится в вершинах 8 кубиков вдвое меньшего размера.

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. Об А.Н.Колмогорове см., например, статьи в журнале «Квант» № 3 за 2003 год.

2. Траекториями точек окружности ω служат диаметры большей окружности.

$$3. (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

4. Это окружность радиуса 2, центр которой лежит на прямой AB , вне отрезка AB , и удален от точки B на расстояние 1.

5. Пусть у многогранника в каждой вершине сходятся по крайней мере 4 ребра, а каждая грань имеет не меньше 4 сторон. Занумеруем грани многогранника. Пусть n_1, n_2, \dots, n_r – количества сторон у этих граней. Тогда $n_1 + n_2 + \dots + n_r = 2P$ и $4r \leq 2P$, т.е. $2r \leq P$. Пусть m_1, m_2, \dots, m_B – количества ребер, исходящих из вершин многогранника. Поскольку $m_1 + m_2 + \dots + m_B = 2P$, аналогично предыдущему имеем $2B \leq P$. Складывая полученные неравенства, приходим к противоречию с теоремой Эйлера: $B + r \leq P$.

ФИЗИКА

1. 1) Венера светит отраженным светом, который исходит только от освещенной поверхности. 2) Галилей обнаружил фазы Венеры.

2. 1) В 2003 году Нобелевскую премию по физике «За пионерский вклад в теорию сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей» получили А.А.Абрикосов, В.Л.Гинзбург и Э.Легет.

2) Ранее за изучение этих явлений Нобелевские премии получили Г.Камерлинг-Оннес (1913 г.) «За исследование свойств тел при низких температурах и получение жидкого гелия», Л.Д.Ландау (1962 г.) «За пионерские исследования по теории конденсированных сред, особенно жидкого гелия», Дж.Бардин, Л.Купер и Дж.Шриффер (1972 г.) «За разработку теории сверхпроводимости», П.Л.Капица (1978 г.) «За открытия в области физики низких температур», Д.Ли и Д.Ошерофф (1996 г.) «За открытие сверхтекучести в гелии-3».

3. 1) В необходимости измерять температуру на расстоянии. 2) Законы теплового излучения. Стефан, Вин. 3) Квантовые представления. 4) Планк, 1900 год.

4. 1) Генрих Герц. 2) 1901 год. 3) За счет отражений от ионосферы. 4) 0,25 с.

5. 1) Кварки. 2) Джеймс Джойс, «Поминки по Финнегану», Мистер Марк слышит во сне слова: «Три кварка для мистера Марка». 3) uud, udd. 4) Шесть. 5) Кварки не наблюдаются в свободном состоянии.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Почхверия, Е.В.Силина,
П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48,

e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,
phys@kvant.info

Веб-сайт: www.kvant.info

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №

Заочно соперничество

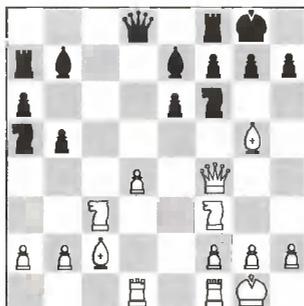
В.Крамник – В.Ананд

Дортмунд, 2001

Принятый ферзевый гамбит

В последнее время Ананд часто опережает Крамника в турнирах, но данная победа Владимира была признана одной из лучших партий 2001 года.

1. d4 d5 2. c4 dc 3. ♖f3 ♖f6 4. e3 e6 5. ♗:c4 c5 6. 0-0 a6 7. ♗b3 cd 8. ed ♗c9 9. ♗c3 ♗e7 10. ♗g5 0-0 11. ♗d2 ♗a5 12. ♗c2 b5 13. ♗f4 ♗a7 14. ♗ad1 ♗b7?



Последовательнее было перебросить ладью с a7 на c7. Теперь же Крамник усугубляет с выгодой провести прорыв в центре.

15. d5! ♗:d5 16. ♗:d5 ed 17. ♗h4 h5. Плохо как 17...h6 18. ♗:h6 gh 19. ♗:h6 с разгромом, так и 17...g6 18. ♗fe1 с неотвратимой угрозой ♗:e7. Но и пешка на h5 – не украшение: крепость черного короля быстро рухнет.

18. ♗fe1 ♗c6 19. g4! ♗d6 20. gh ♗b4 21. h6! ♗:h4 22. ♗:h4 ♗e4 23. hg ♗c8 24. ♗:e7 ♗:e7 25. ♗:e4 de 26. ♗:e4 ♗:g7. Размен ферзей не принес облегчения. Несколькими тошкми ходами Крамник сплетает матовую сеть вокруг черного короля. 27. ♗d6! ♗c5 28. ♗g4+ ♗h7 29. ♗f3! ♗g6. На 29... ♗c2 решает 30. ♗g5+ ♗g7 31. ♗e6+ ♗f6 32. ♗d8+! ♗f5 33. ♗g7.

30. ♗g5+ ♗g7 31. ♗:f7 ♗:f7 32. ♗d:g6+. У белых две лишние пешки. 32... ♗h7 33. ♗g5 ♗:g5 34. ♗:g5 ♗c7 35. a3 b4 36. ab ♗c1+ 37. ♗g2 ♗b1 38. ♗a5 ♗:b2 39. ♗a4. Черные сдались.

П.Леко – В.Бологан

Вейк-ан-Зее, 2004

Защита Каро-Канн

На этом супертурнире Леко разделил 2-е место (после Ананда) и на 1,5 очка опередил Крамника – доказательство того, что их матч будет протекать весьма напряженно.

1. e4 c6 2. d4 d5 3. ♗c3 de 4. ♗:c4 ♗d7 5. ♗g5 ♗gf6 6. ♗d3 e6 7. ♗f3 ♗d6.

Известная позиция. В 1997 году в решающей партии с программой «Дип

Блю» Каспаров здесь неосторожно сыграл 7...h6?! и после 8. ♗:e6! компьютер получил опасную атаку, выиграл партию и матч. Конечно, необходимо сначала развить слона. Теперь в случае 8. ♗:e6? fe 9. ♗g6+ у черного короля есть удобное поле на f8, кроме того, белый слон лишен возможности выйти на f4.

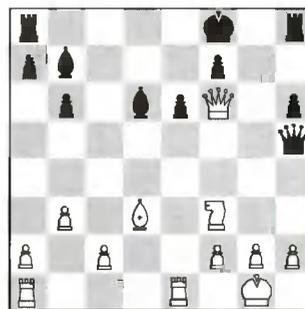
8. ♗e2 h6 9. ♗e4 ♗:e4 10. ♗:e4 ♗c7 11. 0-0 b6 12. ♗g4 ♗f8.

13. b3 ♗b7. К перевесу белых ведет 13...c5 14. dc ♗:c5 15. ♗b2 e5 16. ♗f5.

14. ♗b2 ♗f6 15. ♗b4 c5!? А вот в этом положении движение пешки «с» выглядит совсем неплохо, кстати, встречается оно впервые. Раньше испытывалось 15... ♗d5 16. ♗fe1 ♗f4 17. ♗ad1 ♗g8 18. c4 g5 19. ♗:g5! с бурными осложнениями или 15... ♗e7, но после 16. c4! черным приходится тяжело.

16. dc ♗:c5 17. ♗:f6 gf. Лучше, чем 17... ♗:f3 18. ♗b2.

18. ♗:f6 ♗h5! Вслед за пешкой черные жертвуют ладью и неожиданно переходят в атаку! 19. ♗fe1!



Но не 19. ♗:h8+ ♗e7 20. ♗g6! (единственная защита) 20... ♗:g6 21. ♗c3 ♗g8 22. g3 ♗f5 или 22... ♗h5 с большими неприятностями у белых.

19... ♗g8? Заслуживало внимания 19... ♗:f3 20. ♗:f3 ♗:h2+ 21. ♗h1 ♗:f3 22. gf ♗d6 с хорошим эндшпилем у черных. Бологан стремится к большому и допускает серьезную ошибку.

20. ♗e4! ♗:g2+? Следовало признаться в просчете и продолжать игру без пешки 21. ♗:g2 ♗g4+ 22. ♗h1 ♗:e4 23. ♗:e4! ♗:e4 24. ♗e1. Видно, черные поздно заметили, что их ладья на a8 осталась без защиты. 24... ♗h7. Проигрывало 24... ♗g4 25. ♗g1 ♗e4 26. ♗g7!, а при 24... ♗g6 25. ♗:g6 fg 26. ♗e6 у черных не хватает двух пешек.

25. ♗d4! Черный король обречен. 25... ♗e8 26. ♗:e6 ♗d7. Или 26...fe 27. ♗:e6+ ♗e7 28. ♗c6+.

27. ♗c8 ♗b8 28. ♗d4 ♗c8 29. ♗h3+ f5. 30. ♗:f5. Черные сдались.

Е.Гук

В начале года в Германии состоялся сеанс одновременной игры, в котором Владимир Крамник сыграл со сборной страны на четырех досках. Три немецких гроссмейстера – Р.Даутов, К.Бишофф и К.Лутц – сделали ничью, а самый опытный, Р. Хюбнер, не устоял. Матч-сеанс организовала компания «Даншемаш», которая осенью этого года намерена провести в Швейцарии поединок Крамник – Леко на звание чемпиона мира.

В сеансах одновременной игры установлено множество рекордов. Например, Гарри Каспаров с разгромным счетом обыгрывал даже сборные стран: Швейцарию – 5,5:0,5 (1987 г.), Германию – 3:1 (1992 г.), Аргентину – 9:3 (1992 г.) и 8,5:3,5 (1997 г.), Израиль – 7:1 (1998 г.), Чехию – 5,5:2,5 (2001 г.). Теперь, как мы видим, заочно конкурировать со своим предшественником взялся Владимир Крамник.

Интересно, что 70 лет назад два других чемпиона мира, Хосе Рауль Капабланка и Александр Алехин, тоже соперничали между собой в этом виде шахматного искусства, правда в несколько ином жанре. Первый в начале 30-х годов дал в Нью-Йорке сеанс на 50 досках, за каждой из которых сидело по четыре консультанта, и, стало быть, общее число участников достигало двухсот. Это шоу вызвало огромный интерес, широко освещалось в прессе и собрало две с половиной тысячи зрителей; счет +28, –6, =16 в пользу сеансера. Алехин, не желая отставать, в 1933 году на гастролях в США, в том же Нью-Йоркском клубе, провел сеанс на тех же условиях – 50 досок по четыре шахматиста за каждой – и несколько улучшил рекорд кубинца: +30, –6, =14.

Но еще до этой американской дуэли на 50 досках в 1932 году Алехин дал сеанс в Париже на 60 досках, за каждой из которых сидело по пять союзников, всего – 300 участников! Сеансер взял верх со счетом +37, –6, =17. Однако в этом виде «упражнений» Капабланке вскоре удалось превзойти Алехина, причем на своем родном острове. В Гаване он устроил сеанс уже на 66 досках – с пятью советчиками за каждой доской, и добился блестящего результата: +46, –4, =16. Неясно, правда, помогают ли в таком количестве консультанты друг другу или мешают...

Учитывая, что скоро состоится поединок за шахматную корону, приведем по одной партии его участников.

Физики и математики на монетах мира



Искаженные до неузнаваемости портреты создателя атомистической модели **ДЕМОКРИТА** (5 в. до н.э.) и его научного оппонента **АРИСТОТЕЛЯ** (4 в. до н.э.) представлены на греческих монетах достоинством, соответственно, в 10 и 5 драхм. (Уже из сопоставления этих номиналов видно, какую позицию в споре материалистов и идеалистов занимают современные греки.)

Демокрит представлен также на греческой банкноте достоинством в 100 драхм, где на обороте изображена атомная электростанция.

Компанию Аристотелю в «философской» серии монет Республики Сан-Марино 1996 года составляют **ПЛАТОН**, **ФАЛЕС** и **СОКРАТ**.

(Подробнее о Демокрите – внутри журнала.)